



LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS

SAINT
EXUPÉRY

BRAZZAVILLE CONGO

2025

ANNALES DU BAC MATHÉMATIQUES

LES AFFIRMATIONS

Exercices extraits du site de l'APMEP

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

SUJETS ET CORRIGÉS
46 PAGES

SOMMAIRE

• Exercice 1 (Amérique du Nord 21 mai 2025)	page 3
Solution de l'exercice 1	page ??
• Exercice 2 (Amérique du Nord 22 mai 2025)	page 3
Solution de l'exercice 2	page 21
• Exercice 3 (Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025)	page 4
Solution de l'exercice 3	page 23
• Exercice 4 (Asie 11 juin 2025 - sujet 1)	page 6
Solution de l'exercice 4	page 25
• Exercice 5 (Asie 12 juin 2025 - sujet 2)	page 6
Solution de l'exercice 5	page 27
• Exercice 6 (Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1)	page ??
Solution de l'exercice 6	page 28
• Exercice 7 (Métropole 17 juin 2025 - sujet 1)	page 8
Solution de l'exercice 7	page 30
• Exercice 8 (Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1)	page 8
Solution de l'exercice 8	page 32
• Exercice 9 (Métropole 18 juin 2025 - sujet 2)	page 9
Solution de l'exercice 9	page 33
• Exercice 10 (Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2)	page 10
Solution de l'exercice 10	page 34
• Exercice 11 (Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1)	page 11
Solution de l'exercice 11	page 36
• Exercice 12 (Asie 5 septembre 2025 - sujet 1)	page 12
Solution de l'exercice 12	page 38
• Exercice 13 (Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2)	page 14
Solution de l'exercice 13	page 40
• Exercice 14 (Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1)	page 14
Solution de l'exercice 14	page 40
• Exercice 15 (Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2)	page 15
Solution de l'exercice 15	page 42
• Exercice 16 (Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1)	page 16
Solution de l'exercice 16	page 44
• Exercice 17 (Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2)	page 17
Solution de l'exercice 17	page 45

EXERCICE 1

Amérique du Nord - sujet 1 - 21 mai 2025

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

- A(3 ; -3 ; -2)
- B(5 ; -4 ; -1)
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan \mathcal{P} d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1

La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2

Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x + 3z + 3 = 0$$

Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique \widehat{BAC} est $\frac{\pi}{6}$.

Affirmation 4

La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

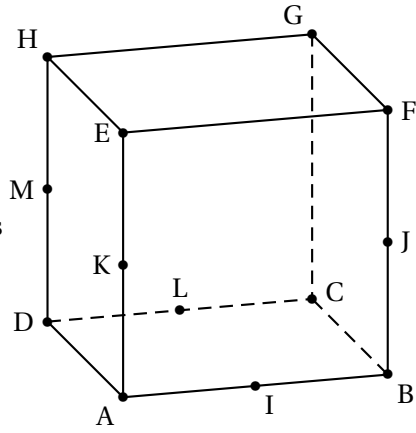
EXERCICE 2

Amérique du Nord - sujet 2 - 22 mai 2025

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

PARTIE A



ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
 Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs
 des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].

Affirmation 1 : « $\vec{JH} = 2\vec{BI} + \vec{DM} - \vec{CB}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $(\vec{AB}, \vec{AH}, \vec{AG})$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\vec{IB} \cdot \vec{LM} = -\frac{1}{4}$. »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points A(2 ; 0 ; -1) et B(5 ; -3 ; 7)

Affirmation 4 : « Le plan \mathcal{P} et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan \mathcal{P}' parallèle à \mathcal{P} passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan \mathcal{P} est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

EXERCICE 3

Amérique du Nord - sujet 2 (secours) - 22 mai 2025

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

On considère la droite D qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et le plan P qui a pour équation cartésienne : $2x - 3y + z - 6 = 0$.

1. **Affirmation :** La droite D' , qui a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 6t \\ z = 9 - 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ est parallèle à la droite } D.$$

2. On admet que les points $A(-2; 3; 1)$, $B(1; 3; -4)$ et $C(6; 3; 9)$ ne sont pas alignés.

Affirmation : La droite D est orthogonale au plan défini par les trois points A , B et C .

3. **Affirmation :** La droite D est sécante avec la droite Δ qui a pour représentation

paramétrique :
$$\begin{cases} x = -4 + 2t' \\ y = 1 - 3t' \\ z = 2 + t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$$

4. **Affirmation :** Le point $F(-3; -3; 3)$ est le projeté orthogonal du point $E(-5; 0; 2)$ sur le plan P .

5. **Affirmation :** Il existe exactement une valeur du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x + y - a^2z + 3 = 0$ soit parallèle à la droite D .

Note du rédacteur « pour certaines questions, il est indispensable que le repère soit orthonormé. »

EXERCICE 4

Asie 11 juin 2025 - sujet 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- α un réel quelconque;
- les points $A(1; 1; 0)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(\alpha; 3; \alpha)$;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de α , les points A , B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Affirmation 2 : Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.

Affirmation 3 : Une mesure de l'angle \widehat{OAB} est 135° .

Affirmation 4 : Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point $H(1; 2; 2)$.

Affirmation 5 : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.

On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω .

EXERCICE 5

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

— les points $C(3; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $H(-6; 2; 2)$ et $J\left(\frac{-54}{13}; \frac{62}{13}; 0\right)$;

— le plan P d'équation cartésienne $2x + 3y + 6z - 6 = 0$;

— le plan P' d'équation cartésienne $x - 2y + 3z - 3 = 0$;

— la droite (d) dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = -8 + \frac{1}{3}t \\ y = -1 + \frac{1}{2}t \\ z = -4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : La droite (d) est orthogonale au plan P et coupe ce plan en H .

Affirmation 2 : La mesure en degré de l'angle \widehat{DCH} , arrondie à 10^{-1} , est $17,3^\circ$.

Affirmation 3 : Les plans P et P' sont sécants et leur intersection est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : Le point J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD) .

EXERCICE 6

Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse,

une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule réponse correcte. Aucune justification n'est demandée.

Dans tout l'exercice, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-3; 1; 4)$ et $B(1; 5; 2)$
- le plan \mathcal{P} d'équation cartésienne $4x + 4y - 2z + 3 = 0$
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 1 \\ z = 9 - 5t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

1. Les droites (AB) et (d) sont :

- a. sécantes non perpendiculaires.
- b. perpendiculaires.
- c. non coplanaires.
- d. parallèles.

2. La droite (AB) est :

- a. incluse dans le plan \mathcal{P} .
- b. strictement parallèle au plan \mathcal{P} .
- c. sécante et non orthogonale au plan \mathcal{P} .
- d. orthogonale au plan \mathcal{P} .

3. On considère le plan P' d'équation cartésienne $2x + y + 6z + 5 = 0$.

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont :

- a. sécants et non perpendiculaires.
- b. perpendiculaires.
- c. confondus.
- d. strictement parallèles.

4. On considère le point $C(0; 1; -1)$. La valeur de l'angle \widehat{BAC} arrondie au degré est :

- a. 90°
- b. 51°
- c. 39°
- d. 0°

EXERCICE 7

Métropole 17 juin 2025 - sujet 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1 ; 0 ; 5)$ et $B(3 ; 2 ; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan \mathcal{P} d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 4 : La distance du point $C(2 ; -1 ; 2)$ au plan \mathcal{P} est égale à $2\sqrt{3}$.

EXERCICE 8

Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = \frac{1}{2}y + 4.$$

Affirmation 1 : Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = k e^{\frac{1}{2}x} - 8, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.

On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.

Affirmation 2 : Il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2 + \cos(n)}.$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 1; 2)$, $B(5; -1; 8)$ et $C(2; 1; 3)$.

Affirmation 4 : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 10$ et une mesure de l'angle \widehat{BAC} est 30° .

5. On considère une fonction h définie sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée seconde est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h''(x) = x \ln x - 3x.$$

Affirmation 5 : La fonction h est convexe sur $[e^3; +\infty[$.

EXERCICE 9

Métropole 18 juin 2025 - sujet 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

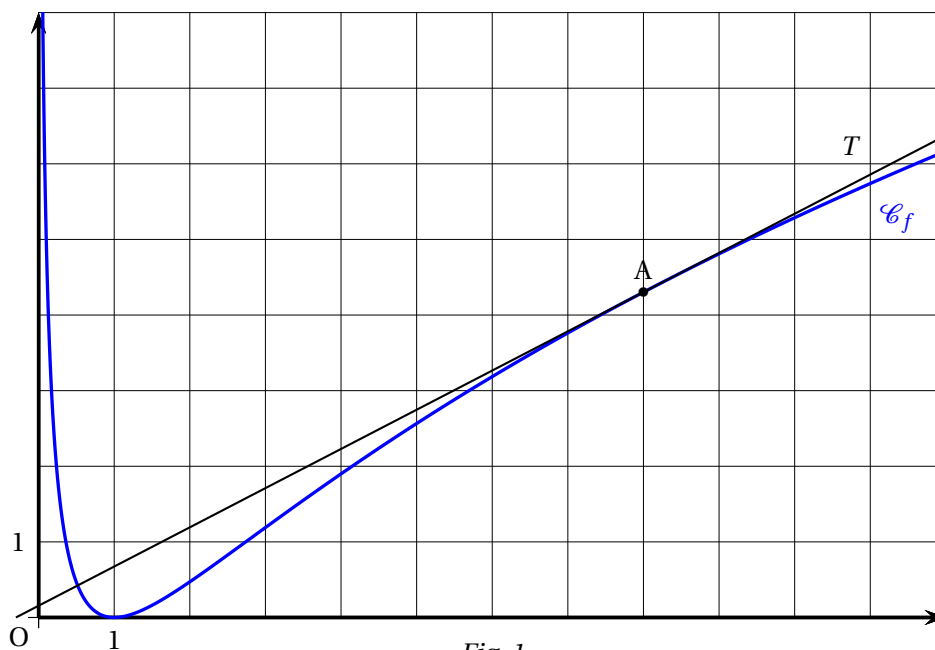
$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$.

3. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée dans un repère orthonormé sur la figure (Fig. 1) en page suivante.

On précise que :

- T est la tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 8;
- L'axe des abscisses est la tangente horizontale à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.



Affirmation 3 : D'après le graphique, la fonction f est convexe sur son ensemble de définition.

4. **Affirmation 4 :** Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) - x + 1 \leq 0$, où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 10

Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2

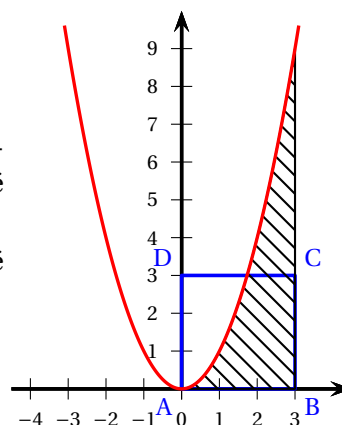
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$ et $F = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$.

Affirmation n° 1 : Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F .

2. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction carré, notée f , ainsi que le carré ABCD de côté 3.

Affirmation n° 2 : La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.



3. On considère l'intégrale J ci-dessous :

$$J = \int_1^2 x \ln(x) dx.$$

Affirmation n° 3 : Une intégration par parties permet d'obtenir : $J = \frac{7}{11}$.

4. Sur \mathbb{R} , on considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = 2y - e^x.$$

Affirmation n° 4 : La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x + e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

5. Soit x donné dans $]0; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x-1)e^n + \cos(n).$$

Affirmation n° 5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

EXERCICE 11

Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x)$.

Affirmation 1 :

$$\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$$

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$.

Affirmation 2 :

$$n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$$

3. Pour les trois affirmations suivantes, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit d la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit d' la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2t'-1 \\ y = -t'+2 \\ z = t'+1 \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x + y - 2z + 18 = 0$.

Soit A le point de coordonnées $(-1; -3; 2)$ et B le point de coordonnées $(-5; -5; 6)$.

On appelle plan médiateur du segment $[AB]$ le plan passant par le milieu du segment $[AB]$ et orthogonal à la droite (AB) .

Affirmation 3 : Le point A appartient à la droite d .

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.

Affirmation 5 : Le plan P est le plan médiateur du segment $[AB]$.

EXERCICE 12

Asie 5 septembre 2025 - sujet 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x e^{-2x}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et on note f' la dérivée de la fonction f . On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée.

Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1. Pour tout réel x , on a $f'(x) = (-2x + 1) e^{-2x}$.

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = e^{-2x}.$$

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $] -\infty ; 1]$.

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\frac{1}{4} - \frac{3e^{-2}}{4}$.

Métropole¹ 9 septembre 2025

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Un musée propose des visites avec ou sans audioguide. Les billets peuvent être achetés en ligne ou directement au guichet.

1. Lorsqu'une personne achète son billet en ligne, un code de validation lui est envoyé par SMS afin qu'elle confirme son achat.

Ce code est généré de façon aléatoire et est constitué de 4 chiffres deux à deux distincts, le premier chiffre étant différent de 0.

Affirmation 1 : Le nombre de codes différents pouvant être générés est 5 040.

2. Une étude a permis de considérer que :

- la probabilité qu'une personne choisisse l'audioguide sachant qu'elle a acheté son billet en ligne est égale à 0,8;
- la probabilité qu'une personne achète son billet en ligne est égale à 0,7;
- la probabilité qu'une personne opte pour une visite sans audioguide est égale à 0,32.

Affirmation 2 : La probabilité qu'un visiteur ne prenne pas l'audioguide sachant qu'il a acheté son billet au guichet est supérieure à deux tiers.

3. On choisit au hasard 12 visiteurs de ce musée.

On suppose que le choix de l'option « audioguide » est indépendant d'un visiteur à l'autre.

Affirmation 3 : La probabilité qu'exactement la moitié de ces visiteurs opte pour l'audioguide est égale à $924 \times 0,2176^6$.

4. Lorsqu'une personne dispose d'un audioguide, elle peut choisir parmi trois parcours :

- un premier d'une durée de cinquante minutes,
- un deuxième d'une durée d'une heure et vingt minutes,
- un troisième d'une durée d'une heure et quarante minutes.

Le temps de parcours peut être modélisé par une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	50 min	1 h 20 min	1 h 40 min
$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,3

Affirmation 4 : L'espérance de X est 77 minutes.

1. Antilles–Guyane–Amérique du Nord

EXERCICE 13

Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Dans une classe de 24 élèves, il y a 14 filles et 10 garçons.

Affirmation 1 :

Il est possible de constituer 272 groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3 \sin(2x + \pi)$ et C sa courbe représentative dans un repère donné.

Affirmation 2 :

Une équation de la tangente à C au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est $y = 6x - 3\pi$.

3. On considère la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = (2x + 1) \ln(x)$.

Affirmation 3 :

La fonction F est une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x}$.

4. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(t) = 45e^{0,06t} + 20$.

Affirmation 4 :

La fonction g est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(E_1) : y' + 0,06y = 1,2 \text{ vérifiant } g(0) = 65.$$

5. On considère l'équation différentielle :

$$(E_2) : y' - y = 3e^{0,4x}$$

où y est une fonction positive de la variable réelle x , définie et dérivable sur \mathbb{R} et y' la fonction dérivée de la fonction y .

Affirmation 5 :

Les solutions de l'équation (E_2) sont des fonctions convexes sur \mathbb{R} .

EXERCICE 14

Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Affirmation 1

47 poignées de mains ont été échangées.

2. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.

Affirmation 2

Il y a 4 896 possibilités de distribuer ces prix.

3. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.

Affirmation 3

Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.

4. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	-1	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on considère Y la variable aléatoire somme de ces deux variables aléatoires.

Affirmation 4

$P(Y = 4) = 0,25$.

5. Un nageur s'entraîne dans l'objectif de parcourir le 50 mètres nage libre en moins de 25 secondes. Au fil des entraînements, il s'avère que la probabilité qu'il y parvienne s'établit à 0,85.

Il effectue, sur une journée, 20 parcours chronométrés sur 50 mètres. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il nage cette distance en moins de 25 secondes lors de cette journée.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$.

Affirmation 5

Sachant qu'il a atteint au moins 15 fois son objectif, une valeur approchée à 10^{-3} de la probabilité qu'il l'ait atteint au moins 18 fois est 0,434.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

*Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère la droite Δ_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$ ainsi que la droite Δ_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$.

- a. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.
- b. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.
- c. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont sécantes.

2. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$, et le plan P d'équation cartésienne : $4x + 2y - z + 3 = 0$.

- a. La droite d est incluse dans le plan P .
- b. La droite d est parallèle strictement au plan P .
- c. La droite d est sécante au plan P .

3. On considère les points $A(3; 2; 1)$, $B(7; 3; 1)$, $C(-1; 4; 5)$ et $D(-3; 3; 5)$.

- a. Les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
- b. Les points A , B et C sont alignés.
- c. \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

4. On considère les plans Q et Q' d'équation cartésienne respective $3x - 2y + z + 1 = 0$ et $4x + y - z + 3 = 0$.

- a. Le point $R(1; 1; -2)$ appartient aux deux plans.
- b. Les deux plans sont orthogonaux.
- c. Les deux plans sont sécants avec pour intersection la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 7t + 4 \\ z = 11t + 7 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**, en justifiant la réponse.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - x^2.$$

Affirmation 1 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. On considère l'équation différentielle

$$(E) : -2y' + 3y = \sin x + 8 \cos x.$$

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2 \cos x - \sin x.$$

Affirmation 2 : La fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x + 1) + 8.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 25$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = g(u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est strictement positive.

Affirmation 3 : La suite (u_n) est décroissante.

4. On considère une fonction affine h définie sur \mathbb{R} .

On note k la fonction définie sur \mathbb{R} par $k(x) = x^4 + x^2 + h(x)$.

Affirmation 4 : La fonction k est convexe sur \mathbb{R} .

5. Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.
Exemple : le mot BAC est possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.

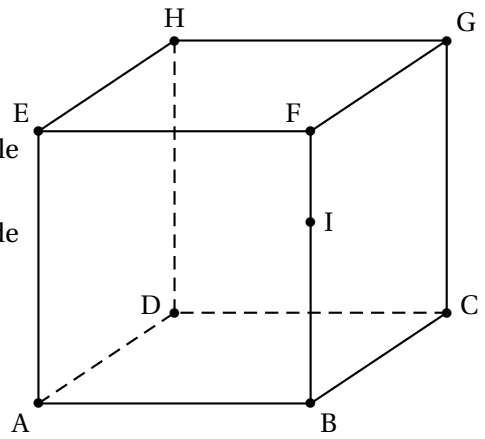
Affirmation 5 : Le mot EULER possède 120 anagrammes.

EXERCICE 17

Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1 et le point I défini par $\vec{FI} = \frac{1}{3}\vec{FB}$.
 On pourra se placer dans le repère orthonormé de l'espace $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



1. On considère le triangle HAC.

Affirmation 1 : Le triangle HAC est un triangle rectangle.

2. On considère les droites (HF) et (DI).

Affirmation 2 : Les droites (HF) et (DI) sont sécantes.

3. On considère un réel α appartenant à l'intervalle $]0; \pi[$.

On considère le vecteur \vec{u} de coordonnées $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \sin(\pi - \alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}$.

Affirmation 3 : Le vecteur \vec{u} est un vecteur normal au plan (FAC).

4. Le cube ABCDEFGH possède 8 sommets. On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets distincts quelconques du cube.

Affirmation 4 : $N = \frac{8^2}{2}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Amérique du Nord - sujet 1 - 21 mai 2025

Affirmation 1 : Vraie

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées par \vec{j} de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires (ils sont même orthogonaux) donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

L'axe des ordonnées passe par l'origine du repère, de coordonnées (0 ; 0 ; 0) et est dirigé par \vec{j} donc une représentation paramétrique de l'axe des ordonnées est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + s \\ z = 0 \end{cases}, \text{ où } s \in \mathbb{R}$$

(d) et l'axe des ordonnées seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} 3 - 2t = 0 \\ -1 = s \\ 2 - 6t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 3 \\ 6t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1,5 \\ s = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution, donc les droites n'ont pas de point commun.

Les droites ne sont ni parallèles, ni confondues, ni sécantes, par élimination, elles sont donc non coplanaires.

Affirmation 2 : Vraie

Soit \mathcal{Q} plan passant par A et orthogonal à la droite (d).

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan \mathcal{Q} et donc aussi $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ car \vec{u} et \vec{n} sont colinéaires et non nuls.

Le plan \mathcal{Q} admet donc une équation de la forme $x + 0y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point A appartient au plan \mathcal{Q} donc $x_A + 3z_A + d = 0$ soit $3 + 3 \times (-2) + d = 0$.

On a donc $d = -3 + 6 = 3$.

Une équation cartésienne du plan passant par A et orthogonal à la droite (d) est donc : $x + 3z + 3 = 0$.

Affirmation 3 : Fausse

Afin de déterminer l'angle \widehat{BAC} nous allons déterminer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

Déterminons tout d'abord les coordonnées du point C :

C est un point de (d), il existe donc un réel t tel que : $\begin{cases} x_C = 3 - 2t \\ y_C = -1 \\ z_C = 2 - 6t \end{cases}$

Or C est le point d'abscisse 2, on a donc $x_C = 2$ d'où $3 - 2t = 2 \iff 1 = 2t$.

$$\iff t = \frac{1}{2}$$

On a donc $z_C = 2 - 6 \times \frac{1}{2} = 2 - 3 = -1$

Les coordonnées du point C sont donc $(2; -1; -1)$.

On peut donc calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ de même : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans un repère orthonormé, nous avons donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3$$

Calculons les normes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} :

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 1^2 = 6, \text{ donc, comme une norme est positive } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6}.$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6, \text{ donc, de même : } \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6}.$$

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\widehat{BAC})$

on en déduit donc que : $-3 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\widehat{BAC})$,

$$\text{soit } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

et donc une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique \widehat{BAC} est $\frac{2\pi}{3}$.

Affirmation 4 : Vraie

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point B sur la plan \mathcal{P} , c'est donc l'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite Δ orthogonal au plan \mathcal{P} passant par le point B.

Le vecteur $\overrightarrow{u'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} , c'est donc un vecteur directeur

de la droite Δ .

De plus le point B(5; -4; -1) appartient à la droite Δ , une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 + 0t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan \mathcal{P} donne l'équation en la variable t :

$$(5 + t) + 3(-1 + 3t) - 7 = 0 \iff 5 + t - 3 + 9t - 7 = 0$$

$$\iff 10t = 5$$

$$\iff t = \frac{1}{2}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et \mathcal{P} est le point de paramètre $t = \frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ .

Il a comme coordonnées : $H\left(5 + \frac{1}{2}; -4; -1 + 3 \times \frac{1}{2}\right)$ soit $H\left(\frac{11}{2}; -4; \frac{1}{2}\right)$.

On a donc : $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$$\text{d'où : } \|\overrightarrow{BH}\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4}, \text{ donc } \|\overrightarrow{BH}\| = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Amérique du Nord - sujet 2 - 22 mai 2025

PARTIE A

Affirmation 1 : Vraie

$$\begin{aligned}\vec{JH} &= \vec{JF} + \vec{FE} + \vec{EH} \\ &= \frac{1}{2}\vec{BF} + \vec{BA} + \vec{BC} \\ &= \frac{1}{2}\vec{DH} + 2\vec{BI} - \vec{CB} \\ &= \vec{DM} + 2\vec{BI} + -\vec{CB}\end{aligned}$$

Affirmation 2 : Fausse

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AB} + \vec{AH}$$

On peut exprimer \vec{AG} comme combinaison linéaire de \vec{AB} et \vec{AH} : les trois vecteurs sont coplanaires et donc le triplet de vecteurs $(\vec{AB}, \vec{AH}, \vec{AG})$ n'est pas une base de l'espace.

Affirmation 3 : Vraie

$$\begin{aligned}\vec{IB} \cdot \vec{LM} &= \vec{IB} \cdot \vec{IK} \quad \text{car } \vec{LM} = \vec{IK} \\ &= \vec{IB} \cdot \vec{IA} \quad \text{car A est le projeté orthogonal de K sur la droite (AB)} \\ &= -\vec{IB} \times \vec{IA} \quad \text{car les vecteurs sont colinéaires de sens contraire} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{car l'arête est de longueur 1 et I est le milieu de l'arête [AB]} \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

PARTIE B

Affirmation 4 : Fausse

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Le vecteur \vec{AB} est un vecteur directeur de la droite (AB).

Le plan \mathcal{P} a pour équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$, le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donc

un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

On est dans un repère orthonormé donc :

$$\vec{AB} \cdot \vec{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 6 + 3 + 24 \neq 0$$

Le vecteur normal au plan et le vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux donc le plan \mathcal{P} et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

Affirmation 5 : Vraie

Méthode 1 :

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles donc le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan \mathcal{P}' .

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P}' est donc de la forme : $2x - y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point B appartient au plan \mathcal{P}' donc $2x_B - y_B + 3z_B + d = 0$

D'où $2 \times 5 + 3 + 3 \times 7 + d = 0$ donc $10 + 3 + 21 + d = 0$ ce qui équivaut à $d = -34$.

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P}' est donc : $2x - y + 3z - 34 = 0$.

En multipliant par -1 on obtient l'équation donnée.

Méthode 2 :

Le plan \mathcal{P}' a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$, le vecteur $\vec{n}' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est

donc un vecteur normal au plan \mathcal{P}' .

$\vec{n}' = -\vec{n}$ donc les vecteurs normaux aux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont colinéaires et donc les deux plans sont parallèles.

Vérifions si le point B appartient au plan \mathcal{P}' .

$$-2x_B + y_B - 3z_B + 34 = -2 \times 5 - 3 - 3 \times 7 + 34 = -10 - 3 - 21 + 34 = 0$$

Donc le point B appartient au plan \mathcal{P}' .

Donc le plan \mathcal{P}' parallèle à \mathcal{P} passant par B a bien pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$.

Affirmation 6 : Vraie

La distance du point A au plan \mathcal{P} est égale à la distance AH avec H projeté orthogonal de A sur le plan \mathcal{P} .

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point A sur la plan \mathcal{P} , c'est donc l'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite Δ orthogonale au plan \mathcal{P} passant par le point A.

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} , c'est donc un vecteur directeur

de la droite Δ .

De plus le point A(2 ; 0 ; -1) appartient à la droite Δ , une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan \mathcal{P} donne l'équation en la variable t :

$$2(2 + 2t) - (-t) + 3(-1 + 3t) + 6 = 0 \iff 4 + 4t + t - 3 + 9t + 6 = 0$$

$$\iff 14t = -7$$

$$\iff t = -\frac{1}{2}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et \mathcal{P} est le point de paramètre $t = -\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ .

Il a comme coordonnées : $H\left(2 - 2 \times \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1 - 3 \times \frac{1}{2}\right)$ soit $H\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

On a donc :

$$\vec{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } \|\vec{AH}\|^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{14}{4}, \text{ donc } \|\vec{AH}\| = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

La distance du point A au plan \mathcal{P} est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Affirmation 7 : Fausse

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et la droite (AB) par $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

La droite (AB) passe par le point A et est dirigée par \vec{AB} donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 0 - 3t \\ z = -1 + 8t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

(d) et (AB) seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} 2 + 3t = -12 + 2k \\ -3t = 6 \\ -1 + 8t = 3 - 5k \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = -12 + 2k \\ t = -2 \\ -17 = 3 - 5k \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} k = 4 \\ t = -2 \\ k = 4 \end{cases}$$

Le système admet une solution, donc les droites ont un point commun : le point de paramètre $t = -2$ de la droite (AB) ou le point de paramètre $k = 4$ de (d) c'est à dire le point C(-4 ; 6 ; -17).

Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes et par conséquent coplanaires.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Amérique du Nord - sujet 2 (secours) - 22 mai 2025

1. Affirmation : Vraie

Par simple lecture des systèmes de représentation paramétrique, on peut dire que

D est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et D' par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$.

On remarque que : $\vec{u}' = -2\vec{u}$ donc les vecteurs directeurs sont colinéaires, et donc les deux droites sont parallèles entre elles.

2. Affirmation : Fausse

De façon générale, si A, B et C définissent un plan, alors D sera orthogonale au plan (ABC) si et seulement si son vecteur directeur \vec{u} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, classiquement \vec{AB} et \vec{AC} .

La **méthode classique** serait donc de déterminer les coordonnées de ces vecteurs, et d'en faire le produit scalaire avec \vec{u} .

Cela donne : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 3 - 3 \\ -4 - 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

On a (avec les coordonnées de \vec{u} déterminées à la question 1.) le produit scalaire qui se calcule au moyen des coordonnées (on suppose que le repère est orthonormé).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 3 \times (-1) + 0 \times 3 + (-5) \times 4 = -23 \neq 0.$$

Comme ce produit scalaire n'est pas nul, pas besoin de calculer le second : on peut affirmer que D n'est pas orthogonale à (ABC), car elle n'est pas orthogonale à (AB) qui est une droite du plan (ABC).

Ici, on peut cependant adopter une **méthode différente** : on repère que les trois points A, B et C partagent la même ordonnée : 3, et sont réputés non alignés, donc le plan ABC est le plan d'équation $y = 3$, et un vecteur normal à (ABC) est le vecteur \vec{j} . Comme \vec{j} est clairement non colinéaire à \vec{u} , alors on peut en déduire que D n'est pas orthogonale à (ABC).

3. Affirmation : Fausse

D est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et Δ est dirigée par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est clairement non colinéaire à \vec{u} : les droites ne sont donc pas parallèles. Elles peuvent être soit sécantes, soit non coplanaires.

Pour trancher, cherchons s'il existe un couple de paramètres $(t ; t')$ tel que le point de paramètre t sur D serait confondu avec le point de paramètre t' sur Δ , autrement dit : s'il existe un point commun aux deux droites.

On résout le système :

$$\begin{cases} 3 - t = -4 + 2t' \\ -2 + 3t = 1 - 3t' \\ 1 + 4t = 2 + t' \end{cases} \iff \begin{cases} -t = -7 + 2t' \\ -3 + 3t + 3t' = 0 \\ -1 + 4t - t' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 7 - 2t' \\ -3 + 3(7 - 2t') + 3t' = 0 \\ -1 + 4(7 - 2t') - t' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 7 - 2t' \\ -3 + 21 - 6t' + 3t' = 0 \\ -1 + 28 - 8t' - t' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 7 - 2t' \\ 3t' = 18 \\ 9t' = 27 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 7 - 2t' \\ t' = 6 \\ t' = 3 \end{cases}$$

Les équations du système sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution, et les droites D et Δ n'ont aucun point commun : elle ne sont donc pas sécantes.

4. Affirmation : Vraie

Le point $F(-3; -3; 3)$ appartient au plan P car ses coordonnées vérifient l'équation du plan, en effet :

$$2x_F - 3y_F + z_F - 6 = 2 \times (-3) - 3 \times (-3) + 3 - 6 = -6 + 9 + 3 - 6 = 0.$$

De plus, \overrightarrow{EF} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 - (-5) \\ -3 - 0 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur a les mêmes coordonnées que le vecteur normal du plan que l'on peut obtenir par lecture de l'équation de P.

Ainsi, la droite (EF) est une droite orthogonale au plan P, telle que $F \in P$, donc F est bien le projeté orthogonal du point $E(-5; 0; 2)$ sur le plan P.

5. Affirmation : Fausse

Par lecture de l'équation de P' , celui-ci admet comme vecteur normal le vecteur

$$\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -a^2 \end{pmatrix}. \text{ La droite D est toujours dirigée par } \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{u}$ vaut : $\vec{n} \cdot \vec{u} = -3 \times (-1) + 1 \times 3 + (-a^2) \times 4 = 6 - 4a^2$.

D est parallèle à P' si et seulement si le vecteur directeur de D est un vecteur directeur de P' , c'est-à-dire si et seulement si le vecteur directeur de D est orthogonal à un vecteur normal à P' .

Autrement dit, D est parallèle à P' si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc si et seulement si $6 - 4a^2 = 0$ c'est à dire $a^2 = \frac{6}{4}$ soit $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $a = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

Il existe donc deux valeurs du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x + y - a^2z + 3 = 0$ soit parallèle à la droite D.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Asie 11 juin 2025 - sujet 1

Affirmation 1 : Fausse.

Le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et \vec{AC} a pour coordonnées : $\vec{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Quel que soit le réel α , ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et ils définissent bien un plan.

Cependant, le repère étant orthonormé, on peut utiliser les coordonnées pour calculer un produit scalaire : $\vec{AC} \cdot \vec{j} = (\alpha - 1) \times 0 + 2 \times 1 + \alpha \times 0 = 2$.

On constate que les vecteurs \vec{j} et \vec{AC} ne sont pas orthogonaux, donc \vec{j} n'est pas un vecteur normal au plan (ABC) : cette partie de l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 2 : Fausse.

En interprétant le système de représentation paramétrique, la droite (d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On rappelle : $\vec{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Pour que les droites soient parallèles, il faudrait que les vecteurs \vec{u} et \vec{AC} soient proportionnels, or, ici, ils ont la même ordonnée, donc ils devraient être égaux.

Or, si on choisit α égal à 1, les altitudes seront égales, mais pas les abscisses, si on choisit α égal à 2, alors les abscisses seront égales, mais pas les altitudes, et, pour tout autre réel α , les abscisses et altitudes seront différentes entre les deux vecteurs.

Quel que soit le réel α , les vecteurs \vec{u} et \vec{AC} sont donc non colinéaires, et les droites ne sont pas parallèles : l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 3 : Vraie.

O étant l'origine du repère, les coordonnées des vecteurs \vec{OA} sont celles du point A, donc celles de \vec{AO} sont : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On rappelle $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a donc, dans le repère orthonormé : $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = -1 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 = -1$.
 Par ailleurs, on a : $AO = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, et $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.

1. On a donc aussi : $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = AO \times AB \times \cos(\widehat{OAB}) = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB})$.
 En égalant les deux expressions du produit scalaire, il vient : $-1 = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB})$,
 ce qui équivaut à : $\cos(\widehat{OAB}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

On reconnaît ici l'opposé du cosinus d'un angle de $\frac{\pi}{4}$, ce qui est donc le cosinus d'un angle de mesure $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, soit effectivement 135° .

Affirmation 4 : Fausse.

Avec les coordonnées données pour H et la représentation paramétrique de (d) , pour avoir $x_H = 1 + t$, il faut avoir $t = 0$, et donc les ordonnées et altitudes ne correspondront pas : le point H n'est pas sur la droite (d) , donc il n'est pas le projeté orthogonal de A sur (d) .

Affirmation 5 : Vraie

Soit t un réel quelconque et M_t le point de paramètre t sur la droite (d) .

La distance OM_t est donnée par :

$$OM_t = \sqrt{(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{1+2t+t^2+4t^2+t^2} = \sqrt{6t^2+2t+1}.$$

$$\text{On a donc : } OM_t = 1 \iff \sqrt{6t^2+2t+1} = 1$$

$$\iff 6t^2+2t+1 = 1$$

$$\iff 6t^2+2t = 0$$

$$\iff 2t(3t+1) = 0$$

$$\iff 2t = 0 \quad \text{ou} \quad 3t+1 = 0$$

$$\iff t = 0 \quad \text{ou} \quad t = -\frac{1}{3}$$

L'équation a deux solutions, il y a donc exactement deux points de la droite (d) qui sont sur la sphère : les points de paramètre 0 et $-\frac{1}{3}$, l'affirmation est vraie.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

Affirmation 1 :

D'après la représentation paramétrique donnée le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur di-

recteur de (d) et d'après l'équation cartésienne de P , $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P .

$\vec{n} = 6\vec{u}$ donc les vecteurs \vec{n} et \vec{u} sont colinéaires donc (d) est orthogonale à P .

$$2x_H + 3y_H + 6z_H - 6 = 2 \times (-6) + 3 \times 2 + 6 \times 2 - 6 = 0 \text{ donc } H \in P.$$

$$H(-6; 2; 2) \in (d) \text{ s'il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} -6 = -8 + \frac{1}{3}t \\ 2 = -1 + \frac{1}{2}t \\ -4 = -4 + t \end{cases} \iff \begin{cases} -18 = -24 + t \\ 4 = -2 + t \\ 2 = -4 + t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6 = t \\ 6 = t \\ 6 = t \end{cases}$$

Conclusion : **l'affirmation 1 est vraie.**

Affirmation 2 :

$$\vec{CH} \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{CH} \cdot \vec{CD} = -9 \times (-3) + 2 \times 2 + 2 \times 0 = 31$$

Or par définition $\vec{CH} \cdot \vec{CD} = \|\vec{CH}\| \times \|\vec{CD}\| \times \cos(\widehat{DCH})$

$$\text{On a } \|\vec{CH}\| = \sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{89} \text{ et } \|\vec{CD}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{donc } \cos(\widehat{DCH}) = \frac{\vec{CH} \cdot \vec{CD}}{\|\vec{CH}\| \times \|\vec{CD}\|} = \frac{31}{\sqrt{89} \times \sqrt{13}}$$

donc l'angle \widehat{DCH} mesure $\arccos\left(\frac{31}{\sqrt{89} \times \sqrt{13}}\right) \approx 24,3^\circ$ donc **l'affirmation 2 est fausse.**

Affirmation 3 : $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P ; $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P' .

Les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires donc les plans P et P' ne sont pas parallèles et sont donc sécants, leur intersection est une droite.

$A(3; 0; 0) \in \Delta$ (obtenu avec $t = 0$)

$2x_A + 3y_A + 6z_A - 6 = 2 \times 3 + 3 \times 0 + 6 \times 0 - 6 = 0$ donc $A \in P$ et $x_A - 2y_A + 3z_A - 3 = 3 - 2 \times 0 + 3 \times 0 - 3 = 0$ donc $A \in P'$

Donc l'intersection des plans P et P' est une droite contenant A . Pour déterminer si cette droite est Δ , soit on prend un autre point, soit on montre qu'un vecteur directeur de Δ est orthogonal à \vec{n} et \vec{n}' .

$B(0; 0; 1) \in \Delta$ (obtenu avec $t = 1$)

$2x_B + 3y_B + 6z_B - 6 = 2 \times 0 + 3 \times 0 + 6 \times 1 - 6 = 0$ donc $B \in P$ et $x_B - 2y_B + 3z_B - 3 = 0 - 2 \times 0 + 3 \times 1 - 3 = 0$ donc $B \in P'$ donc **l'affirmation 3 est vraie.**

Affirmation 4 : $\vec{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de la droite (CD) est

représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 - 3s \\ y = 2s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

pour $s = \frac{31}{13}$ on retrouve les coordonnées de J donc $J \in (CD)$.

de plus $\vec{HJ} \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ \frac{36}{13} \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\vec{HJ} \cdot \vec{CD} = \frac{24}{13} \times (-3) + \frac{36}{13} \times 2 + (-2) \times 0 = 0$

donc les vecteurs \vec{HJ} et \vec{CD} sont orthogonaux donc J est bien le projeté orthogonal de H sur (CD) donc **l'affirmation 4 est vraie.**

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1

1. Les droites (AB) et (d) sont : sécantes non perpendiculaires.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

est donc aussi un vecteur directeur de la droite (AB) .

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

Le repère est orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire.

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 2 \times 3 + 0 \times 2 - 1 \times (-5) = 11 \neq 0$$

donc les droites (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.

Une équation paramétrique de la droite (AB) de vecteur directeur \vec{u} et passant par le point A(-3; 1; 4) est :

$$\begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = 1 + 2s \\ z = 4 - s \end{cases} \quad \text{où } s \in \mathbb{R}.$$

Les deux droites sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} -3 + 2s = -6 + 3t \\ 1 + 2s = 1 \\ 4 - s = 9 - 5t \end{cases} \iff \begin{cases} 2s - 3t = -3 \\ s = 0 \\ s - 5t = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} -3t = -3 \\ s = 0 \\ -5t = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Le système admet une unique solution donc les droites sont sécantes.

2. La droite(AB) est orthogonale au plan \mathcal{P} .

Un vecteur normal au plan \mathcal{P} est $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ soit le vecteur \overrightarrow{AB} .

La droite (AB) est donc orthogonal au plan \mathcal{P} .

3. Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont perpendiculaires.

Un vecteur normal au plan \mathcal{P}' est $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles. On est dans un repère orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées pour calculer le produit scalaire.

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 4 \times 2 + 4 \times 1 - 2 \times (-6) = 8 + 4 - 12 = 0$$

Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans sont perpendiculaires.

4. La valeur de l'angle \widehat{BAC} arrondie au degré est 51° .

On a : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On est dans un repère orthonormé donc on peut utiliser les coordonnées pour calculer les longueurs et le produit scalaire.

Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs de deux manières différentes :

d'une part : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 4 + 0 \times 4 - 5 \times (-2) = 22$

d'autre part :

$$AC = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \text{ et } AB = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{On a donc } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 6\sqrt{34} \cos(\widehat{BAC})$$

$$\text{D'où : } 22 = 6\sqrt{34} \cos(\widehat{BAC}), \text{ donc } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{22}{6\sqrt{34}}$$

D'où $\widehat{BAC} \approx 51^\circ$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Métropole 17 juin 2025 - sujet 1

1. Affirmation 1 : Vraie.

La lecture de la représentation paramétrique donnée indique que la droite représentée :

— passe (pour le paramètre $t = 0$) par le point de coordonnées $(3 ; 2 ; -1)$, autrement dit par B ;

— et qu'elle est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Comme on a : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 2 - 0 \\ -1 - 5 \end{pmatrix}$, soit $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, on remarque que $\vec{AB} = -2\vec{u}$,

donc la droite dont on a la représentation paramétrique est dirigée par un vecteur colinéaire à \vec{AB} .

Ainsi, la représentation paramétrique donnée est celle d'une droite passant par B et dirigée par \vec{AB} : c'est bien la droite (AB).

Affirmation 2 : Fausse.

Comme O est l'origine du repère, on a $\vec{OA} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, et donc O, A et B définissent bien un plan. Le repère est orthonormal, donc on peut calculer des produits scalaires à l'aide des coordonnées :

On a bien : $\vec{n} \cdot \vec{OA} = 5 \times (-1) + (-2) \times 0 + 1 \times 5 = -5 + 0 + 5 = 0$ et \vec{n} est donc bien orthogonal à \vec{OA} ,

par contre, on a : $\vec{n} \cdot \vec{OB} = 5 \times 3 + (-2) \times 2 + 1 \times (-1) = 15 - 4 - 1 = 10 \neq 0$ et \vec{n} n'est donc pas orthogonal à \vec{OB} .

Ainsi, \vec{n} n'est pas orthogonal au plan (OAB), car il n'est pas orthogonal à deux vecteurs définissant une base de ce plan.

2. Affirmation 3 : Fausse.

Par lecture des représentations paramétriques, les deux droites d et d' sont dirigées

respectivement par $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles (ni confondues, ni strictement parallèles). Elles peuvent donc être soit sécantes, soit non coplanaires.

Cherchons s'il existe un couple $(k ; s)$ tel que le point de paramètre k sur d soit confondu avec le point de paramètre s sur d' , pour cela, résolvons :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 15 + k = 1 + 4s \\ 8 - k = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases} &\iff \begin{cases} k = -14 + 4s \\ 8 - (-14 + 4s) = 2 + 4s \\ -6 + 2(-14 + 4s) = 1 - 6s \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} k = -14 + 4s \\ 8 + 14 - 4s = 2 + 4s \\ -6 - 28 + 8s = 1 - 6s \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} k = -14 + 4s \\ 8s = 20 \\ 14s = 35 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} k = -14 + 4s \\ s = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \\ s = \frac{35}{14} = \frac{5}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} s = 2,5 \\ s = 2,5 \\ k = -4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système a une solution, donc les deux droites ont un point commun, le point qui a comme coordonnées (11 ; 12 ; -14), c'est le point de paramètre $k = -4$ sur d et c'est aussi le point de paramètre $s = 2,5$ sur d' .

Elles sont donc sécantes en ce point, et donc sont coplanaires.

3. Affirmation 4 : Vraie.

Le repère est orthonormé, donc par lecture de l'équation de plan, P admet comme

vecteur normal \vec{n}' de coordonnées : $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la droite Δ , passant par C et orthogonale à P aura pour représentation para-

métrique : $\begin{cases} x = 2 + l \\ y = -1 - l \\ z = 2 + l \end{cases}$ avec $l \in \mathbb{R}$.

Si on appelle H le projeté orthogonal de C sur P , alors $H = P \cap \Delta$. Donc H sera le point de Δ dont le paramètre fait que les coordonnées paramétriques vérifient l'équation de P .

$$\begin{aligned}
\text{On résout donc : } (2 + l) - (-1 - l) + (2 + l) + 1 = 0 &\iff 3l + 6 = 0 \\
&\iff 3l = -6 \\
&\iff l = -2
\end{aligned}$$

H est donc le point de paramètre $l = -2$ sur Δ , donc ses coordonnées sont :

H(0 ; 1 ; 0).

$$\begin{aligned}
\text{La distance CH vaut donc : } CH &= \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - (-1))^2 + (0 - 2)^2} \\
&= \sqrt{4 + 4 + 4} \\
&= \sqrt{4 \times 3} \\
&= \sqrt{4} \times \sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

La distance entre C et P , c'est-à-dire la distance de C à son projeté orthogonal sur P est donc bien égale à $2\sqrt{3}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1

1. Affirmation 1 : Vraie.

On reconnaît une forme présente dans le cours : les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, avec a et b réels non nuls ont pour solution les fonctions de la forme : $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.

Ici, on applique cette propriété avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 4$, ce qui donne bien l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y + 4$, ayant pour solution les fonction de la forme : $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - \frac{4}{\frac{1}{2}}$ soit $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 8$, avec $k \in \mathbb{R}$.

2. Affirmation 2 : Vraie.

Une équipe de volley-ball telle que décrite est constituée d'un couple de deux éléments. Le premier élément de ce couple est un ensemble de 3 élèves filles distinctes (donc pas de répétition), qui n'ont pas de rôle particulier, donc on parle d'un ensemble, et pas d'une liste ou d'un triplet (donc pas de notion d'ordre) : on va utiliser des combinaisons.

3 filles choisies parmi les 18 de la classe : il y a $\binom{18}{3} = 816$ façons de choisir les trois filles qui constitueront ce premier ensemble.

Le deuxième élément du couple sera un ensemble de trois élèves garçons, choisis avec les même principes.

3 garçons choisis parmi les 14 de la classe : il y a $\binom{14}{3} = 364$ façons de choisir les trois garçons qui constitueront ce second ensemble.

Finalement, par principe multiplicatif, une équipe est un ensemble de trois filles choisi parmi les 816 ensembles possibles, associé à un ensemble de garçons parmi les 364 ensembles possibles : il y a donc $816 \times 364 = 297\,024$ équipes différentes possibles.

3. Affirmation 3 : Vraie.

Pour tout n entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(n) \leq 1 &\implies 1 \leq 2 + \cos(n) \leq 3 \\ &\implies \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \cos(n)} \leq \frac{1}{1} \quad \text{fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\implies \frac{n}{3} \leq \frac{n}{2 + \cos(n)} \quad \text{car } n \geq 0 \\ &\implies \frac{n}{3} \leq v_n \end{aligned}$$

Par limite du quotient, on a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$,

donc, par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, ce qui est l'affirmation 3.

4. Affirmation 4 : Fausse.

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc, comme le repère est orthonormé, on a :

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 10$, la première partie de l'affirmation est donc vraie.

Cependant, on peut aussi calculer les normes et en déduire le cosinus de l'angle \widehat{BAC} , défini par les deux vecteurs.

$$AB = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56} = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14}.$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}.$$

On a donc, avec la définition trigonométrique du produit scalaire :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2\sqrt{14} \times \sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC}) = 4\sqrt{7} \cos(\widehat{BAC})$$

En égalant ces deux expressions du produit scalaire, on déduit :

$$10 = 4\sqrt{7} \cos(\widehat{BAC}) \quad \text{qui équivaut à : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{10}{4\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

Il se trouve que le cosinus de 30° est connu, il vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et est donc différent de celui trouvé ici : l'angle ne mesure donc pas 30° .

Remarque : une valeur approchée d'une mesure de l'angle peut être obtenue à la calculatrice :

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{5\sqrt{7}}{14}\right) \approx 19^\circ.$$

5. Affirmation 5 : Vraie.

En effet, pour tout x réel strictement positif, on a : $h''(x) = x \ln(x) - 3x = x(\ln(x) - 3)$

x étant strictement positif, le signe de $h''(x)$ est donc le signe de $\ln(x) - 3$.

$$x \in [e^3; +\infty[\implies e^3 \leq x$$

$$\implies \ln(e^3) \leq \ln(x) \quad \text{car } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^* +$$

$$\implies 3 \leq \ln(x)$$

$$\implies 0 \leq \ln(x) - 3$$

$$\implies 0 \leq h''(x)$$

Sur l'intervalle $[e^3; +\infty[$, la dérivée seconde de h est donc à valeurs positives, donc la dérivée première de h est croissante, et donc h elle-même est bien convexe sur cet intervalle.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Métropole 18 juin 2025 - sujet 2

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$. FAUSSE

En écrivant $u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n} = \frac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{5^n} + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ et en remarquant que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{5^n} = 0$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{3}{5} < 1$;

Donc par somme de limites, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} + 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{5^n} + \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$.

Raisonnement par récurrence :

Initialisation : $w_0 = 0 \geq 0$: l'inégalité est vraie au rang 0;

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n \geq n$, alors

$$3w_n \geq 3n \iff 3w_n - 2n \geq 3n - 2n \text{ ou } 3w_n - 2n \geq n \text{ et enfin } 3w_n - 2n + 3 \geq n + 3.$$

Or $n + 3 = n + 1 + 2$, donc $n + 3 > n + 1$ et $3w_n - 2n + 3 = w_{n+1}$.

On a donc $w_{n+1} \geq n + 3 > n + 1$, soit par transitivité : $w_{n+1} \geq n + 1$: l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$; d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$: l'affirmation 2 est vraie.

3. L'affirmation est fausse car si f était convexe sur $]0 ; +\infty[$, elle le serait au point d'abscisse 8 et sa courbe représentative serait au dessus de sa tangente au point A. C'est le contraire d'après le graphique : Affirmation 3 : fausse.

4. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$.

Comme somme de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, f est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

On a de façon immédiate :

- $f'(x) = 0 \iff x = 1$;
- $f'(x) > 0 \iff x < 1$, donc sur $]0 ; 1[$, f est croissante de moins l'infini à $f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$.
- $f'(x) < 0 \iff x > 1$, donc f est décroissante sur $]1 ; +\infty[$ de 0 à moins l'infini.

Donc cette fonction est négative puisque son maximum est 0 en $x = 1$: l'affirmation 4 est vraie.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2

1. Affirmation 1 : Fausse.

On a $\text{Card}(E) = 7$ et $\text{Card}(F) = 10$.

Les 3-uplets d'éléments distincts de E , ce sont des arrangements de 3 éléments distincts (l'ordre compte, sans répétition) choisis parmi 7. Il y en a donc :

$$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210.$$

Les combinaisons à 4 éléments de F sont des ensembles (sans ordre, sans répétition) de 4 éléments choisis parmi 10. Il y en a :

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 1 \times 7 = 210.$$

Il y a donc exactement le même nombre, et pas davantage, de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F .

2. Affirmation 2 : Vraie.

En effet, le carré ABCD a un côté de 3 unités de longueurs, donc son aire est de :

$$3^2 = 9 \text{ unités d'aire.}$$

Par ailleurs, la zone hachurée est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction carré et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$. La fonction carré étant positive, l'aire, en unités d'aire est - égale à l'intégrale :

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \left(\frac{1}{3} \times 3^3 \right) - \left(\frac{1}{3} \times 0^3 \right) = 9 - 0 = 9 \text{ unités d'aire.}$$

Les deux zones ont donc bien la même aire, de 9 unités d'aire.

3. Affirmation 3 : Fausse.

Pour tout x dans $[1 ; 2]$, on pose :
$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } J &= \int_1^2 x \ln(x) dt \\ &= \int_1^2 u'(x) \times v(x) dt \quad \text{donc, par intégration par parties :} \\ &= \left[u(x) \times v(x) \right]_1^2 - \int_1^2 u(x) \times v'(x) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} dt \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 2^2 \times \ln(2) \right) - \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \ln(1) \right) - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx \\ &= 2 \ln(2) - 0 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= 2 \ln(2) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \times 2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \right) \right] \\ &= 2 \ln(2) - \frac{3}{4} \approx 0,63629 \end{aligned}$$

Or $\frac{7}{11} \approx 0,63636$, donc $J \neq \frac{7}{11}$.

4. Affirmation 4 : Vraie.

D'une part, f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout x réel, on a :

$$f'(x) = e^x + 2e^{2x}.$$

D'autre part, pour tout réel x , on a :

$$2f(x) - e^x = 2(e^x + e^{2x}) - e^x = 2e^x + 2e^{2x} - e^x = e^x + 2e^{2x}$$

On constate donc que, pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2f(x) - e^x$.

Autrement dit, la fonction f vérifie l'équation différentielle (E), donc f est bien une solution de (E).

5. Affirmation 5 : Vraie.

Soit x un réel dans $]0; 1[$. On a donc : $(x - 1) \in]-1; 0[$.

Autrement dit, le réel $(x - 1)$ est **strictement négatif**.

Ainsi, comme on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ et que $(x - 1) < 0$, on en déduit, par limite du produit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^n = -\infty$.

Par limite de la somme, on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^{n+1} = -\infty$.

Comme la fonction \cos est bornée par 1 et -1 , on a : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1$,

et donc notamment : $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(n) \leq 1 \implies (x - 1)e^n + \cos(n) \leq (x - 1)e^{n+1}$.

Comme on a établi que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^{n+1} = -\infty$ cela implique, par comparaison, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^n + \cos(n) = -\infty$.

La suite (u_n) diverge bien vers $-\infty$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1 I

Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1

1. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x)$.

Affirmation 1 : $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$

On calcule $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e x \ln(x) dx$ en faisant une intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

$$\begin{cases} u'(x) = x & \implies u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln(x) & \implies v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(x) \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} \times \ln(e) - \frac{1^2}{2} \times \ln(1) \right] - \left[\frac{e^2}{4} - \frac{1^2}{4} \right] \\ &= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

Affirmation 1 vraie

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$.

Affirmation 2 : $n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$

On va utiliser les propriétés : $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ et $n! = n \times (n-1)!$.

$$\begin{aligned}
& \bullet \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \text{ donc} \\
& k \times \binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k! \times (n-k)!} = \frac{k \times n!}{k! \times (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \times (n-k)!} \\
& \bullet \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-1-k+1)!} \\
& \quad = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} \text{ donc} \\
& n \times \binom{n-1}{k-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \times (n-k)!}
\end{aligned}$$

Affirmation 2 vraie

3. Pour les trois affirmations suivantes, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit d la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit d' la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2t'-1 \\ y = -t'+2 \\ z = t'+1 \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x + y - 2z + 18 = 0$.

Soit A le point de coordonnées $(-1; -3; 2)$ et B le point de coordonnées $(-5; -5; 6)$.

On appelle plan médiateur du segment $[AB]$ le plan passant par le milieu du segment $[AB]$ et orthogonal à la droite (AB) .

Affirmation 3 : Le point A appartient à la droite d .

$A \in d$ si et seulement s'il existe un réel t tel que :
$$\begin{cases} -1 = t+1 \\ -3 = 2t+1 \\ 2 = -t \end{cases}$$

Le réel $t = -2$ vérifie les trois égalités donc le point A appartient à la droite d .

Affirmation 3 vraie

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.

d et d' sont sécantes s'il existe un couple (t, t') tel que
$$\begin{cases} t+1 = 2t'-1 \\ 2t+1 = -t'+2 \\ -t = t'+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t+1 = 2t'-1 \\ 2t+1 = -t'+2 \\ -t = t'+1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ 2(2t'-2)+1 = -t'+2 \\ -(2t'-2) = t'+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ 4t'-4+1 = -t'+2 \\ -2t'+2 = t'+1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ 5t' = 5 \\ 1 = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-2 \\ t' = 1 \\ \frac{1}{3} = t' \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc les droites d et d' ne sont pas sécantes.

Affirmation 4 fausse

Affirmation 5 : Le plan P est le plan médiateur du segment $[AB]$.

Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $MA = MB$, ce qui équivaut à $MA^2 = MB^2$.

$$\begin{aligned}
MA^2 &= (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 \\
&= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 4z + 4 \\
&= x^2 + 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z + 14 \\
MB^2 &= (x+5)^2 + (y+5)^2 + (z-6)^2 \\
&= x^2 + 10x + 25 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 12z + 36 \\
&= x^2 + 10x + y^2 + 10y + z^2 - 12z + 86 \\
MA^2 = MB^2 &\iff x^2 + 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z + 14 = x^2 + 10x + y^2 + 10y + z^2 - 12z + 86 \\
&\iff -8x - 4y + 8z - 72 = 0 \iff -4(2x + y - 2z + 18) = 0 \\
&\iff 2x + y - 2z + 18 = 0
\end{aligned}$$

On retrouve l'équation du plan P donc P est le plan médiateur du segment $[AB]$.

Affirmation 5 vraie

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Asie 5 septembre 2025 - sujet 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-2x}$.

On admet que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et on note f' la dérivée de la fonction f .

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Affirmation 1. Pour tout réel x , on a $f'(x) = (-2x + 1)e^{-2x}$.

$$f(x) = xe^{-2x} \text{ donc } f'(x) = 1 \times e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (-2x + 1)e^{-2x}.$$

Affirmation 1 vraie

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $y' + 2y = e^{-2x}$.

$$f'(x) + 2f(x) = (-2x + 1)e^{-2x} + 2xe^{-2x} = -2xe^{-2x} + e^{-2x} + 2xe^{-2x} = e^{-2x}$$

Affirmation 2 vraie

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $] -\infty ; 1]$.

$$f'(x) = (-2x + 1)e^{-2x} \text{ donc } f''(x) = (-2) \times e^{-2x} + (-2x + 1) \times (-2)e^{-2x} = (4x - 4)e^{-2x}.$$

On étudie le signe de $f''(x)$ sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$4x - 4$	-	0	+
e^{-2x}	+		+
$f''(x)$	-	0	+
f	concave		convexe

Affirmation 3 fausse

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

On détermine le signe de $f'(x) = (-2x + 1) e^{-2x}$ sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x + 1$	+	0	-
e^{-2x}	+		+
$f'(x)$	+	0	-

Valeurs remarquables

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{-1} > 0$
- $f(x) = x e^{-2x} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{e^{2x}}$; par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On établit le tableau des variations de f sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{2} e^{-1}$	0

- Sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2}]$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-1} > 0$. Or $-1 \in]-\infty; \frac{1}{2} e^{-1}]$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$.
- Sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; +\infty[$, la fonction f est strictement positive donc l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Donc l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Affirmation 4 vraie

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\frac{1}{4} - \frac{3e^{-2}}{4}$.

L'aire du domaine est égale à $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x e^{-2x} dx$.

On utilise une intégration par parties : $\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 x e^{-2x} dx = \left[x \times \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) dx = \left[-\frac{x e^{-2x}}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \left[-\frac{e^{-2}}{2} - 0 \right] - \left[\frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^0}{4} \right] = \frac{1}{4} - \frac{3e^{-2}}{4} \end{aligned}$$

Affirmation 5 vraie

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2

1. $\binom{14}{2} \times \binom{10}{2} = 4095 \neq 272$.

L'énoncé indique « est-il possible » et ne fait pas intervenir le nombre maximum de groupes composés de deux filles et deux garçons. Comme $272 < 4095$, l'affirmation est vraie.

2. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6 \times \cos(2x + \pi)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 \times \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \pi\right) = 6$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \pi\right) = 0$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est donnée par :

$$y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \times f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = 6x - 6 \times \frac{\pi}{2}$$

$$y = 6x - 3\pi$$

L'affirmation est vraie.

3. $\forall x \in]0; +\infty[$, $F'(x) = \frac{2x \ln x + 2x + 1}{x}$, en particulier $F'(1) = \frac{3}{2}$ et $f(1) = 2$. f n'est pas la dérivée de F . Ainsi on montre que F n'est pas une primitive de f .

L'affirmation est fausse.

4. $g(0) = 45 \times e^0 + 20 = 65$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) + 0,06 \times g(t) = 45 \times 0,06 \times e^{0,06t} + 0,06 \times (45 \times e^{0,06t} + 20) = 5,4 \times e^{0,06t} + 1,2$$

g n'est pas solution de (E) .

L'affirmation est fausse.

5. Soit y une solution positive de (E_2) on peut écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) = y(x) + 3e^{0,4x}$, comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) \geq 0$ et $3e^{0,4x} \geq 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) \geq 0$.

On dérive l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) = y'(x) + 1,2e^{0,4x}. \text{ Comme } \forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) \geq 0 \text{ et } 1,2e^{0,4x} \geq 0, \text{ alors}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) \geq 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) \geq 0 \text{ donc } y \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.$$

L'affirmation est vraie : les solutions positives de (E_2) sont des fonctions convexes sur \mathbb{R} .

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1

1. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Affirmation 1

47 poignées de mains ont été échangées.

Chaque joueur de l'équipe de 22 joueurs serre 25 mains; cela fait donc en tout 22×25 soit 550 poignées de main.

Affirmation 1 fausse

2. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.

Affirmation 2

Il y a 4 896 possibilités de distribuer ces prix.

Comme on récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun, il faut chercher le nombre d'ensembles à 3 éléments parmi 18 soit : $\binom{18}{3} = 816$.

Affirmation 2 fausse

3. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.

Affirmation 3

Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.

Jacques est sur le podium donc il a décroché une des 3 premières places.
Si Jacques finit 1^{er}, il y a 6 possibilités pour le 2^e et 5 possibilités pour le 3^e; cela fait 30 podiums.
Si Jacques finit 2^e, il y a 6 possibilités pour le 1^{er} et 5 possibilités pour le 3^e; cela fait 30 podiums.
Si Jacques finit 3^e, il y a 6 possibilités pour le 1^{er} et 5 possibilités pour le 2^e; cela fait 30 podiums.
Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.

Affirmation 3 vraie

4. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	-1	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on considère Y la variable aléatoire somme de ces deux variables aléatoires.

Affirmation 4

$$P(Y = 4) = 0,25.$$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes donc

$$P((X_1 = x_i) \cap (X_2 = x_j)) = P(X_1 = x_i) \times P(X_2 = x_j).$$

L'événement $(Y = 4)$ est réalisé dans 3 cas disjoints :

$(X_1 = -1$ et $X_2 = 5)$, $(X_1 = 2$ et $X_2 = 2)$, $(X_1 = 5$ et $X_2 = -1)$.

$$\begin{aligned} P(Y = 4) &= P((X_1 = -1) \cap (X_2 = 5)) + P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) + P((X_1 = 5) \cap (X_2 = -1)) \\ &= P(X_1 = -1) \times P(X_2 = 5) + P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 2) + P(X_1 = 5) \times P(X_2 = -1) \\ &= 0,4 \times 0,2 + 0,3 \times 0,3 + 0,2 \times 0,4 = 0,25. \end{aligned}$$

Affirmation 4 vraie

5. Un nageur s'entraîne dans l'objectif de parcourir le 50 mètres nage libre en moins de 25 secondes. Au fil des entraînements, il s'avère que la probabilité qu'il y parvienne s'établit à 0,85. Il effectue, sur une journée, 20 parcours chronométrés sur 50 mètres. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il nage cette distance en moins de 25 secondes lors de cette journée.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$.

Affirmation 5

Sachant qu'il a atteint au moins 15 fois son objectif, une valeur approchée à 10^{-3} de la probabilité qu'il l'ait atteint au moins 18 fois est 0,434.

$$\begin{aligned} \text{La probabilité cherchée est : } P_{(X \geq 15)}(X \geq 18) &= \frac{P((X \geq 15) \cap (X \geq 18))}{P(X \geq 15)} = \\ &= \frac{P(X \geq 18)}{P(X \geq 15)} \end{aligned}$$

À la calculatrice, on trouve :

$$P(X \geq 15) \approx 0,9327 \text{ et } P(X \geq 18) \approx 0,4049 \text{ donc } \frac{P(X \geq 18)}{P(X \geq 15)} \approx 0,434.$$

Affirmation 5 vraie

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point.

Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. • Δ_1 a pour vecteur directeur $\delta_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et Δ_2 a pour vecteur directeur $\delta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

premières coordonnées ne sont pas égales, les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles;

En remplaçant respectivement dans les équations paramétriques s par 2 et t par 1, on trouve que le point de coordonnées $(-2; 6; 1)$ appartient bien aux deux droites.

2. a. $M(x = 1 + 2t; y = 3 - t; z = 1 + 2t) \in d$ appartient à P si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de P , donc si

$$4(1+t) + 2(3-t) - (1+2t) + 3 = 0 \iff 4 + 4t + 6 - 2t - 1 - 2t + 3 = 0 \iff 0t + 12 = 0 \iff 0t = -12 : \text{cette équation n'a pas de solution : cela signifie que la droite } d \text{ est parallèle strictement au plan } P.$$

3. On considère les points $A(3; 2; 1)$, $B(7; 3; 1)$, $C(-1; 4; 5)$ et $D(-3; 3; 5)$.

Commençons par la deuxième affirmation : on a

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Il reste donc la première affirmation que l'on peut démontrer :

A, B, C et D sont coplanaires, c'est-à-dire si par exemple D appartient au plan (ABC) et dans ce cas si $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (car \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas des vecteurs colinéaires).

Avec $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, l'égalité vectorielle précédente se traduit par le système :

$$\begin{cases} -6 = 4x - 4y \\ 1 = x + 2y \\ 4 = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} -6 = 4x - 4 \\ 1 = x + 2 \\ 1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = 4x \\ -1 = x \\ 1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2} = x \\ -1 = x \\ 1 = y \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. Donc le point D n'appartient pas au plan défini par les points A, B et C ou encore A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

4. a. $R(1; 1; -2) \in (Q) \iff 3 \times 1 + -2 \times 1 - 2 + 1 = 0 \iff 3 - 2 - 2 + 1 = 0$ qui est vraie;

$R(1; 1; -2) \in (Q') \iff 4 \times 1 + 1 \times 1 - (-2) + 3 = 0 \iff 10 = 0$ qui est fausse : la première affirmation est fausse;

- b. (Q) a pour vecteur normal $\vec{q} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (Q') a pour vecteur normal $\vec{q}' \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\vec{q} \cdot \vec{q}' = 3 \times 4 - 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 12 - 2 - 1 = 9 \neq 0$: les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux, les plans (Q) et (Q') ne sont pas perpendiculaires.

- c. Les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées vérifient les équations de ces deux plans donc le système :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 1 = 0 \\ 4x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

On peut poser $x = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ et on obtient le système aux deux inconnues y et z suivant :

$$\begin{cases} x & = & t \\ 3x - 2y + z + 1 & = & 0 \\ 4x + y - z + 3 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & t \\ -2y + z & = & -3t - 1 \\ y - z & = & -4t - 3 \end{cases}$$

La somme membre à membre des deux dernières équations donne

$$-y = -7t - 4 = 0 \iff y = 7t + 4;$$

enfin la deuxième équation $-2y + z = -3t - 1$ donne $z = 2y - 3t - 1 = 2(7t + 4) - 3t - 1 = 14t + 8 - 3t - 1 = 11t + 7$.

Conclusion : les points communs aux deux plans sont les points dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x & = & t \\ y & = & 7t + 4 \\ z & = & 11t + 7 \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R} : \text{c'est l'équation de la droite}$$

contenant le point $K(0; 4; 7)$ et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$. : la troisième affirmation est vraie.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 16

Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1

1. Puisque $x > 0$, on peut écrire $f(x) = x^2 \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 \right)$.

On sait (croissances comparées) que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$, donc que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} - 1 = -1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, on obtient finalement par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 \right) = -\infty.$$

L'affirmation 1 est vraie.

2. $f(x) = 2 \cos(x) - \sin(x)$, donc : $f'(x) = -2 \sin(x) - \cos(x)$. Donc :

$$\begin{aligned} -2f'(x) + 3f(x) &= -2(-2 \sin(x) - \cos(x)) + 3(2 \cos(x) - \sin(x)) \\ &= 4 \sin(x) + 2 \cos(x) + 6 \cos(x) - 3 \sin(x) \\ &= \sin(x) + 8 \cos(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est solution de l'équation différentielle $-2y' + 3y = \sin(x) + 8 \cos(x)$.

L'affirmation 2 est vraie.

3. On a $u_0 = 25$ et donc $u_1 = \ln(3 \times 25 + 1) = \ln 76 \approx 4,3 < 25$.

On peut donc supposer que la suite est décroissante ce que l'on démontre par récurrence : soit $(P_n) : u_{n+1} < u_n$

Initialisation : on a vu que $u_1 < u_0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_{n+1} < u_n$: on a successivement :

$$\begin{aligned}u_{n+1} < u_n &\iff 3u_{n+1} < 3u_n \\ &\iff 3u_{n+1} + 1 < 3u_n + 1 \\ &\iff \ln(3u_{n+1} + 1) < \ln(3u_n + 1) \text{ par croissance de la fonction } \ln \\ &\iff u_{n+2} < u_{n+1}\end{aligned}$$

La relation est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$: ceci montre que la suite (u_n) est décroissante.

L'affirmation 3 est vraie.

4. Une application affine est de la forme $h(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Donc $k(x) = x^4 + x^2 + ax + b$; k est une fonction polynôme dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle on a successivement :

$$k'(x) = 4x^3 + 2x + a, \text{ puis}$$

$k''(x) = 12x^2 + 2$, comme un carré est supérieur ou égal à zéro, il en résulte que $k''(x) \geq 2 > 0$.

Sur \mathbb{R} , la dérivée seconde est supérieure à zéro : la fonction k est convexe sur \mathbb{R} .

L'affirmation 4 est vraie.

5. Avec 5 lettres différentes le nombre d'anagrammes est égal à $5! = 120$.

Comme EULER possède deux lettres identiques le nombre d'anagrammes est égal

$$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60.$$

L'affirmation 5 est fausse.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 17

Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2

1. Dans un cube toutes les faces sont des carrés de même côté, donc les diagonales de chaque face ont même longueur.

Or dans le triangle HAC, chaque côté est une diagonale d'une face ([HA] est une diagonale de ADHE, [AC] est une diagonale de ABCD et [CH] est une diagonale de CDHG). Les trois côtés du triangle HAC ont donc même longueur $\sqrt{2}$, c'est donc un triangle équilatéral.

Or les angles aux sommets d'un triangle équilatéral mesurent 60° , donc HAC n'est pas rectangle.

L'affirmation 1 est **FAUSSE**.

2. Les droites (DH) et (BF) sont des arêtes opposées du cube, elles sont donc parallèles, et donc coplanaires. Donc (BF) est une droite du plan (DFH).

Comme I est un point de (BF) il appartient au plan (DFH). Donc les droites (DI) et (HF) sont coplanaires.

Puisque (BD) est la droite parallèle à (HF) passant par D (arêtes opposées), et que B et I sont distincts, d'après l'axiome d'Euclide, la droite (DI) n'est pas parallèle à (HF). Or si deux droites sont coplanaires, elles sont soit parallèles soit sécantes. Donc (DI) et (HF) sont sécantes.

L'affirmation 2 est **VRAIE**.

3. Si le vecteur \vec{u} est normal au plan (FAC) alors il est orthogonal à tout vecteur de ce plan.

On calcule donc le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{FC}$, puisque deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

$$\vec{FC} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{FC} &= \sin(\alpha) \times 0 + \sin(\pi - \alpha) \times 1 + \sin(-\alpha) \times (-1) \\ &= \sin(\pi - \alpha) - \sin(-\alpha) \\ &= \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \\ &= \boxed{2 \sin(\alpha) \neq 0} \text{ puisque } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Le vecteur \vec{u} n'est donc pas orthogonal au vecteur \vec{FC} . Donc, puisqu'il existe un vecteur de (FAC) qui n'est pas orthogonal à \vec{u} , \vec{u} n'est pas un vecteur normal à (FAC).

L'affirmation 3 est **FAUSSE**.

4. Un cube possède **8 sommets**.

Pour former un segment, on doit choisir 2 sommets distincts parmi ces 8 sommets. L'ordre n'a pas d'importance (le segment reliant A à B est le même que celui reliant B à A).

On utilise donc une combinaison :

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28.$$

Il existe **28 segments** pouvant relier deux sommets distincts d'un cube.

L'affirmation 4 est **FAUSSE**.