



LYCÉE FRANÇAIS SAINT-EXUPÉRY DE BRAZZAVILLE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES



LYCÉE INTERNATIONAL FRANÇAIS

**SAINT
EXUPÉRY**

BRAZZAVILLE CONGO

2025

ANNALES DU BAC MATHÉMATIQUES

SUITES NUMÉRIQUES

Exercices extraits du site de l'APMEP

PAR VALÉRIEN EBERLIN
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

**SUJETS ET CORRIGÉS
67 PAGES**

SOMMAIRE

| | |
|---|---------|
| • Exercice 1 (Amérique du Nord 21 mai 2025) | page 3 |
| Solution de l'exercice 1 | page 27 |
| • Exercice 2 (Amérique du Nord 22 mai 2025) | page 4 |
| Solution de l'exercice 2 | page 30 |
| • Exercice 3 (Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025) | page 5 |
| Solution de l'exercice 3 | page 31 |
| • Exercice 4 (Asie 11 juin 2025 - sujet 1) | page 6 |
| Solution de l'exercice 4 | page 34 |
| • Exercice 5 (Asie 12 juin 2025 - sujet 2) | page 7 |
| Solution de l'exercice 5 | page 36 |
| • Exercice 6 (Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1) | page 8 |
| Solution de l'exercice 6 | page 37 |
| • Exercice 7 (Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2) | page 10 |
| Solution de l'exercice 7 | page 39 |
| • Exercice 8 (Métropole 17 juin 2025 - sujet 1) | page 11 |
| Solution de l'exercice 8 | page 41 |
| • Exercice 9 (Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1) | page 13 |
| Solution de l'exercice 9 | page 44 |
| • Exercice 10 (Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2) | page 14 |
| Solution de l'exercice 10 | page 47 |
| • Exercice 11 (Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1) | page 16 |
| Solution de l'exercice 11 | page 50 |
| • Exercice 12 (Asie 5 septembre 2025 - sujet 1) | page 18 |
| Solution de l'exercice 12 | page 52 |
| • Exercice 13 (Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1) | page 20 |
| Solution de l'exercice 13 | page 54 |
| • Exercice 14 (Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2) | page 21 |
| Solution de l'exercice 14 | page 57 |
| • Exercice 15 (Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1) | page 23 |
| Solution de l'exercice 15 | page 60 |
| • Exercice 16 (Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2) | page 24 |
| Solution de l'exercice 16 | page 62 |
| • Exercice 17 (Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1) | page 25 |
| Solution de l'exercice 17 | page 63 |
| • Exercice 18 (Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2) | page 26 |
| Solution de l'exercice 18 | page 65 |

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1 .
2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n , par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

- a. Calculer a_0 et a_1 .
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geq 3n - 1$$

- d. En déduire la limite de la suite (a_n) .
3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n) .
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
 4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.
On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```

1 def algo(p):
2     u=2
3     n=0
4     while u-1>p:
5         u=(2*u+1)/(u+2)
6         n=n+1
7     return (n,u)
```

- a. Interpréter les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction $\text{algo}(p)$ dans le contexte de l'exercice.
- b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI^e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1.
 - a. Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2 .
 - b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2.
 - a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
 - d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

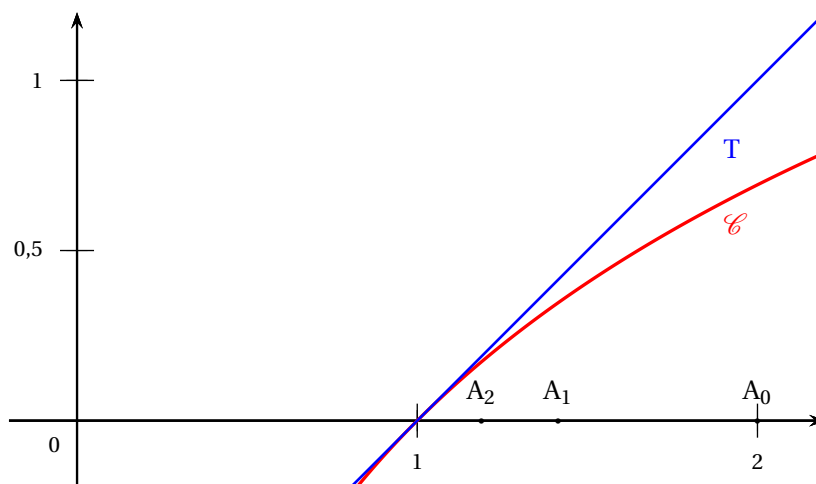
Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe \mathcal{C} de la fonction \ln et la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

Une équation de la droite T est $y = x - 1$.

Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0,99; 1,01[$.

- a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0,99 ; 1,01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.
- b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.
- c. Déduire des questions 1. c. et 2. b. de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$.
3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.
On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à \sqrt{a} .

```

from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...
    return L

```

EXERCICE 3

Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---------------|---------------|---|---|---|
| u_n | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | |

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0 .
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer w_n en fonction de n .
4. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.
3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 4

Asie 11 juin 2025 - sujet 1

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.
On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.
On a $u_1 = 2$ et

pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2 .
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions?

Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n.$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```
1 def mystere(k) :
2     n = 1
3     s = 2
4     while s < k :
5         n = n + 1
6         s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7     return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

EXERCICE 5

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44,5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```

1 def suite(n) :
2     U=30
3     W=45
4     for i in range (1,n+1) :
5         U=U/2+10
6         W=W/2+U/2+7
7     return W
```

2. L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1 . Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?
3. **a.** Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

- b.** On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.
Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1 .
2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2; 6,5]$.
4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2; 6,5]$ par $h(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

| | | | |
|--------|--------|-------------------|----------|
| x | 2 | $m \approx 2,364$ | 6,5 |
| $h(x)$ | $h(2)$ | $M \approx 2,265$ | $h(6,5)$ |

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2; 6,5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import *  
  
def f(x) :  
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25  
  
def bornes(n) :  
    p = 1/10**n  
    x = 6  
    while f(x)-x > 0 :  
        x = x + p  
    return (x-p, x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande $\log(x)$ renvoie la valeur $\ln x$;
 - la commande $c**d$ renvoie la valeur de c^d .
- a. Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`.
On donnera les valeurs arrondies au centième.
 - b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .
3. On rappelle que le réel α , défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2; 6,5]$.
Justifier que $\ell = \alpha$.

EXERCICE 7

Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1^{er} janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel n , u_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n , v_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ .

5. a. Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ .

b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.

3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.

4. On considère le programme Python ci-contre.

a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.

b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n=0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n+1
print (2025 + n)
```

EXERCICE 8

Métropole 17 juin 2025 - sujet 1

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur $[0; 20]$ par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0; 20]$.

- a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
 - c. Justifier que $L = 15$.
3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
 - a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
 - b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
    n=0
    u= 1
    while ..... :
        n=.....
        u=.....
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t , en année, écoulee à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0; +\infty[$;
- f est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : y' = 0,02y(15 - y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.

On note f' la fonction dérivée de f .

1. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) : y' = -0,3y + 0,02.$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3. En déduire que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 9

Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \quad \text{et, pour } n \geq 1, f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n , on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n .

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1. a. On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$f'_n(x) = (n - x)x^{n-1} e^{-x}.$$

b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

| | | | |
|-----------|---|------------------------------|-----------|
| x | 0 | n | $+\infty$ |
| $f'_n(x)$ | + | 0 | - |
| f_n | 0 | $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ | 0 |

2. Justifier par le calcul que le point $A(1 ; e^{-1})$ appartient à la courbe \mathcal{C}_n .

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ pour $n \geq 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Sur le graphique en ANNEXE, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}$ et \mathcal{C}_{100} .
 - a. Donner une interprétation graphique de I_n .
 - b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
2. Calculer I_0 .
3. a. Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ .
5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}.$$

6. a. Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python.
On a importé la constante `e`.

```
def mystere(n):  
    I = 1 - 1/e  
    L = [I]  
    for i in range(n):  
        I = (i + 1)*I - 1/e  
        L.append(I)  
    return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice?

Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.
 Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
 Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
 Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 et devient 1).

La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.

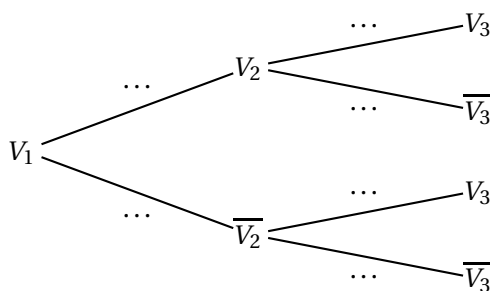
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

- V_n l'évènement : og la n -ième machine détient la valeur 1 fg;
- \overline{V}_n l'évènement : og la n -ième machine détient la valeur 0 fg.

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



- b. Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
- c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $p_n = P(V_n)$.

La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

- a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

- b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

- c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.

On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.

On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0; 1[$.

```
1 def simulation(n):
2     donnee = 1
3     liste = [donnee]
4     for k in range(n):
5         if rand() < 0.1
6             donnee = 1 - donnee
7         liste.append(donnee)
9     return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer `[1, 0, 0, 1]`. Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.
2. Calculer la probabilité que `simulation(4)` renvoie la liste `[1, 1, 1, 1, 1]` et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste `[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]`.

EXERCICE 11

Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel k , renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n) .

Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif a , $\log(a)$ renvoie la valeur du logarithme népérien de a .

```
def suite(k):
    L = []
    u = 5
    for i in range(.....):
        L.append(u)
        u=.....
    return(.....)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé 1.

Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

```
def mystere(n):
    L = suite(n)
    c = 1
    for i in range(n - 1):
        if L[i] > L[i + 1]:
            c = 0
    return c
```

```
>>> mystere(10000)
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$$

On admet que g est dérivable sur $[2; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2; +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln(x^2 - 3) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

| | | | |
|--------|---|--------------|-----------|
| x | 2 | 3 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | 0 | $\ln(6) - 1$ | $-\infty$ |

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2; +\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
 - Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β .
- On note ℓ la limite de la suite (u_n) .
Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ .

EXERCICE 12

Asie 5 septembre 2025 - sujet 1

Soit n un entier naturel non nul.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n .

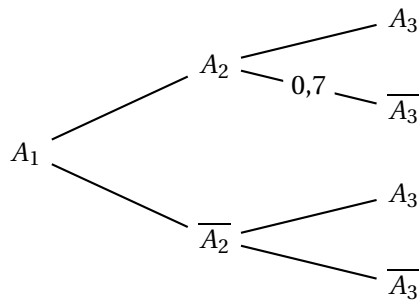
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

- Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :

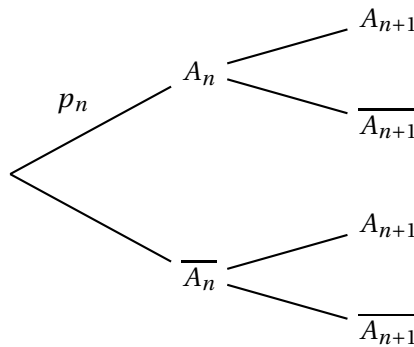


2. Montrer que $p_3 = 0,58$.
3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geq 1$.

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -0,4p_n + 0,7$.
On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par :
 $u_n = p_n - 0,5$.
 - b. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - c. En déduire l'expression de u_n , puis de p_n en fonction de n .
 - d. Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Partie C :

Soit $x \in]0 ; 1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}(\overline{A_{n+1}}) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = (1 - 2x)p_n + x$.
2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la suite (p_n) est convergente et donner sa limite.

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

| | | |
|--------|---|-----------|
| x | 2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | 2 | $+\infty$ |

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.
 b. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. On appelle ℓ la limite de (u_n) .
 On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ .
4. On considère la fonction rang écrite ci-dessous en langage Python.
 On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre x .

```

1 from math import *
2
3 def rang(a) :
4     u = 6
5     n=0
6     while u >= a :
7         u = sqrt(3*u - 2)
8         n = n+1
9     return n

```

- a. Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur?
 b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n , entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1 .
2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

- a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0 .
- b. On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}.$$

En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$$

- c. Calculer la limite de (v_n) .
3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2,01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geq N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1,99; 2,01[$.

EXERCICE 14

Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes

Partie A - Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :

- chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à 0,4;
- la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2.
 - a. Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.
 - b. Calculer $P(X \leq 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice ?
3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Partie B - Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparaît plus pertinente :

- si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est 0,5
- par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il soit dominant l'année suivante est 0,3.

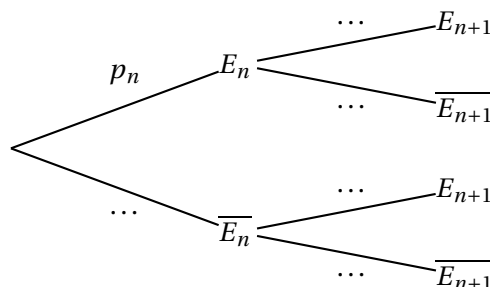
On considère que l'année de référence est 2023.

On note pour tout entier naturel n :

- E_n l'évènement « le phénomène El Niño est dominant l'année 2023 + n » ;
- p_n la probabilité de l'évènement E_n .

En 2023, El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que $p_1 = 0,3$.
3. En vous aidant de l'arbre, montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,3$$

On cherche à prévoir l'évolution de l'apparition du phénomène El Niño.

4.
 - a. Conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (p_n) .
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $p_n \leq \frac{3}{8}$.
 - c. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n) .
 - d. En déduire la convergence de la suite (p_n) .

On cherche à déterminer la limite de la suite (p_n) .

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{3}{8}$ pour tout entier naturel n .

- a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 et préciser son premier terme.
- b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$p_n = \frac{3}{8}(1 - 0,2^n).$$

- c. Calculer la limite de la suite (p_n) .
- d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 15

Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1

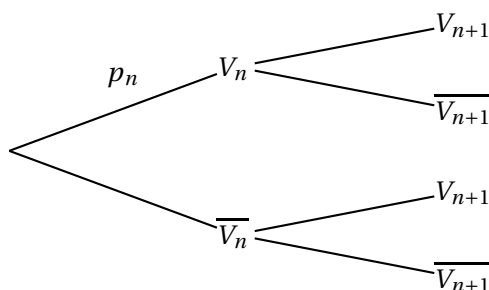
Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,7.

Pour tout entier naturel n , on note V_n , l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n^{e} jour » et p_n la probabilité de V_n .

Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

1.
 - a. Indiquer la valeur de p_2 .
 - b. Montrer que $p_3 = 0,88$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
 - c. Sachant que le 3^e jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent ?
On arrondira le résultat à 10^{-2} .
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7$.
4. On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geq 1$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

| Programme 1 | | Programme 2 | | Programme 3 | |
|-------------|----------------------|-------------|------------------------|-------------|----------------------|
| 1 | def repas(n): | 1 | def repas(n): | 1 | def repas(n): |
| 2 | p=1 | 2 | p=1 | 2 | p=1 |
| 3 | L=[p] | 3 | L=[p] | 3 | L=[p] |
| 4 | for k in range(1,n): | 4 | for k in range(1,n+1): | 4 | for k in range(1,n): |
| 5 | p = 0.2*p+0.7 | 5 | p = 0.2*p+0.7 | 5 | p = 0.2*p+0.7 |
| 6 | L.append(p) | 6 | L.append(p) | 6 | L.append(p+1) |
| 7 | return(L) | 7 | return(L) | 7 | return(L) |

4. **a.** Lequel de ces programmes permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) ? Aucune justification n'est attendue.
- b.** Avec le programme choisi à la question **a.** donner le résultat affiché pour $n = 5$.
5. Démontrer par récurrence que, pour tout naturel $n \geq 1$, $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$.
6. En déduire la limite de la suite (p_n) .

EXERCICE 16

Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 &= \ln(4) \\ v_{n+1} &= \ln(-1 + 2e^{v_n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad w_n = (-1 + e^{v_n}).$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1. Donner les valeurs exactes de v_1 et w_0 .

2. **a.** Une partie d'une feuille de calcul où figurent les indices et les termes des suites (v_n) et (w_n) est reproduite ci-contre.

Parmi les trois formules ci-dessous, choisir la formule qui, saisie dans la cellule B3 puis recopiée vers le bas, permettra d'obtenir les valeurs de la suite (v_n) dans la colonne B.

| | |
|-----------|------------------------|
| Formule 1 | LN(-1 + 2 * EXP(B2)) |
| Formule 2 | = LN(-1 + 2 * EXP(B2)) |
| Formule 3 | = LN(-1 + 2 * EXP(A2)) |

- b.** Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n) .

- c.** À l'aide d'un raisonnement par récurrence, valider votre conjecture concernant le sens de variation de la suite (v_n) .

| | A | B | C |
|-----------|-----|-------------|--------|
| 1 | n | v_n | w_n |
| 2 | 0 | 1,38629436 | 3 |
| 3 | 1 | 1,94591015 | 6 |
| 4 | 2 | 2,56494936 | 12 |
| 5 | 3 | 3,21887582 | 24 |
| 6 | 4 | 3,8918203 | 48 |
| 7 | 5 | 4,57471098 | 96 |
| 8 | 6 | 5,26269019 | 192 |
| 9 | 7 | 5,95324333 | 384 |
| 10 | 8 | 6,6450909 7 | 768 |
| 11 | 9 | 7,33758774 | 1536 |
| 12 | 10 | 8,03040956 | 3072 |
| 13 | 11 | 8,72339402 | 6144 |
| 14 | 12 | 9,41645983 | 12288 |
| 15 | 13 | 10,1095663 | 24576 |
| 16 | 14 | 10,8026932 | 49152 |
| 17 | 15 | 11,4958302 | 98304 |
| 18 | 16 | 12,1889723 | 196608 |
| 19 | 17 | 12,8821169 | 393216 |

3.
 - a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (v_n) .
4. Justifier que l'algorithme suivant écrit en langage Python renvoie un résultat quel que soit le choix de la valeur du nombre S.

```

from math import*
def seuil(S):
    V=ln(4)
    n=0
    while V < S :
        n=n+1
        V=ln(2*exp(V)-1)
    return(n)

```

EXERCICE 17

Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1

On considère n un entier naturel non nul.
 On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; 1]$ et on note f'_n sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.
 On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = x e^{1-x}.$$

1. Montrer que $f'_1(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0 ; 1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. a. Justifier que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

- c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

- b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```
from math import exp

def suite():
    u = ...
    for n in range (1, ...):
        u = ...
    return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite(n)` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 18

Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.
3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.
6.
 - a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.
 - b. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

- c. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation $f(x) = x$.
- d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 1

Amérique du Nord - sujet 1 - 21 mai 2025

Pour cet exercice, on admet que les deux suites (a_n) et (u_n) sont bien définies, ce qui équivaut à admettre que les termes de la suite (u_n) sont tous différents de -2 (pour que la suite (u_n) soit bien définie) et de 1 (pour que (a_n) soit bien définie).

1. On a : $u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4} = 1,25$.

2.

- a. On a : $a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = 2$
 et $a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{1,25}{1,25 - 1} = \frac{1,25}{0,25} = 5$.

b. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} \text{On a, d'une part : } a_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1 - u_n + 2}{u_n + 2}} \\ &= \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 3}{u_n + 2}} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 3} \times \frac{u_n + 2}{u_n + 2} \\ &= \frac{2u_n + 1}{u_n + 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et, d'autre part : } 3a_n - 1 &= 3 \times \frac{u_n}{u_n - 1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n - 1} - \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = \frac{3u_n - (u_n - 1)}{u_n - 1} \\ &= \frac{2u_n + 1}{u_n - 1} \end{aligned}$$

On constate donc bien que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Autre méthode :

Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_{n+1} - 1 + 1}{u_{n+1} - 1} = 1 + \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} = 1 + \frac{1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - \frac{u_n + 2}{u_n + 2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 2}} = 1 + \frac{u_n + 2}{u_n - 1} \\ &= 2 + \frac{u_n + 2}{u_n - 1} - 1 = \frac{2(u_n - 1) + u_n + 2}{u_n - 1} - 1 \\ &= \frac{2u_n - 2 + u_n + 2}{u_n - 1} - 1 \\ &= \frac{3u_n}{u_n - 1} - 1 = 3 \frac{u_n}{u_n - 1} - 1 \\ &= 3a_n - 1 \end{aligned}$$

c. Posons, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'affirmation P_n :

$$\langle a_n \geq 3n - 1 \rangle.$$

Initialisation : On a calculé $a_1 = 5$ et donc on a bien $5 \geq 3 \times 1 - 1 = 2$.

L'affirmation P_1 est donc vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $a_n \geq 3n - 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} a_n \geq 3n - 1 &\implies 3a_n \geq 3(3n - 1) \quad \text{car } 3 > 0 \\ &\implies 3a_n - 1 \geq 9n - 3 - 1 \\ &\implies a_{n+1} \geq 9n - 4 \quad \text{d'après la question 2. b. } 3a_n - 1 = a_{n+1} \\ &\implies a_{n+1} \geq 3n + 6n + 3 - 7 \\ &\implies a_{n+1} \geq 3(n + 1) + 6n - 7 \\ &\implies a_{n+1} \geq 3(n + 1) - 1 + 6n - 6 \\ &\implies a_{n+1} \geq 3(n + 1) - 1 + 6(n - 1) \\ &\implies a_{n+1} \geq 3(n + 1) - 1 \quad \text{car } 6(n - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Si, pour un entier n naturel non nul (ce qui garantit $(n - 1) \geq 0$), P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_1 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n , la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n , on a : $a_n \geq 3n - 1$.

d. Comme $3 > 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 1 = +\infty$.

Par comparaison, puisque pour tout n non nul, on a $a_n \geq 3n - 1$, on en déduit que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

3. a. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{u_n}{u_n - 1} &\iff a_n \times (u_n - 1) = u_n \quad \text{car } u_n - 1 \neq 0 \\
&\iff a_n \times u_n - a_n - u_n = 0 \\
&\iff (a_n - 1) \times u_n - a_n = 0 \\
&\iff (a_n - 1) \times u_n = a_n \\
&\iff u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}
\end{aligned}$$

Pour la dernière étape, la division par $a_n - 1$ est légitime, puisque a_n est un quotient de deux nombres différents, car le dénominateur est égal au numérateur moins 1, donc a_n ne peut pas être égal à 1, donc $a_n - 1$ est non nul.

Ainsi, on a bien exprimé u_n en fonction de a_n avec la relation annoncée dans le question.

- b.** Avec les questions **2. a.** on a $a_0 = 2$ et avec **2. c.**, pour n naturel non nul, on a $a_n \geq 3n - 1 > 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , a_n est non nul.

On déduit donc de la question précédente que, pour tout n naturel, on a :

$$u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$$

Enfin, puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, par limite du quotient, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$,

puis, par limite de la somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{a_n} = 1$,

enfin, par limite du quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}} = 1$.

La suite (u_n) converge donc vers 1.

- 4.** Puisqu'on admet que la suite (u_n) est décroissante, cela signifie que la suite est minorée par sa limite et donc que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 1$ donc $u_n - 1 \geq 0$.

- a.** Cette fonction python initialise la variable u à 2, ce qui est la valeur de u_0 et la variable n à 0, ce qui est l'indice correspondant.

Puis, à chaque exécution de la boucle `while`, u se voit affecter le terme suivant dans la suite (u_n) et n se voit affecter l'entier suivant, donc l'indice correspondant au terme dont la valeur est stockée dans la variable u .

Cette boucle `while` tourne tant que l'écart entre le terme stocké dans la variable u et la limite 1 est strictement supérieur à la valeur p , qui est l'argument choisi pour invoquer la fonction.

Les valeurs n et u renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` correspondent donc respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur p choisie.

- b.** On parcourt la suite à la calculatrice, et on constate que $u_5 \approx 1,0027$, donc $u_5 - 1 > 0,001$ et $u_6 \approx 1,0009$, donc $u_6 - 1 \leq 0,001$.

La valeur de n pour $p = 0,001$ est donc 6 (et la valeur renvoyée pour u est donc une valeur approchée de u_6).

On peut aussi programmer la fonction python sur la calculatrice et faire l'appel `algo(0.001)`, qui renvoie (6, 1,000 914 913 083 257)

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 2

Amérique du Nord - sujet 2 - 22 mai 2025

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1.
 - a. $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$
 $u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$.
 - b. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers 1.
2.
 - a. Posons, pour tout entier naturel n , l'affirmation P_n : « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».
Initialisation : On a calculé $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$ et $u_0 = 2$
On a donc bien $1 \leq u_1 \leq u_0$.
L'affirmation P_0 est donc vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$
Par hypothèse de récurrence, on a :
 $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \implies \sqrt{1} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$
car la fonction racine carrée est croissante sur \mathbb{R}^+
 $\implies 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$
Si, pour n naturel, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.
Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n , la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n , on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 - b. D'après la question précédente, pour tout entier n , $1 \leq u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.
Et pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.
Or toute suite décroissante et minorée est convergente donc, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geq 1$.
 - c. Soit $x \in [0; +\infty[$:
 $\sqrt{x} = x \iff x = x^2$ car $x \geq 0$
 $\iff x^2 - x = 0$
 $\iff x(x-1) = 0$
 $\iff x = 0$ ou $x = 1$
L'équation $\sqrt{x} = x$ admet deux solutions sur $[0; +\infty[$: 0 et 1.
 - d. La suite (u_n) est convergente vers ℓ et est définie par récurrence par :
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction racine carrée qui est continue sur $[0; +\infty[$.
D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Nous avons résolu cette équation à la question précédente, les solutions sont 0 et 1, or d'après la question **A. 1. b.**, $\ell \geq 1$ donc $\ell = 1$.

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Partie B

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \ln(u_{n+1})$
 $= \ln(\sqrt{u_n})$
 $= \frac{1}{2} \ln(u_n)$
 $= \frac{1}{2} v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

b. On a donc, pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q^n = \ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\ln(2)}{2^n}$.

c. Or, pour tout entier naturel n , $v_n = \ln(u_n)$ donc $\frac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$ c'est à dire : $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. a. À l'aide de la calculatrice on trouve que pour tout $k < 7$, $u_k > 1,01$ et $u_7 \approx 1,00543$ donc $k = 7$.

b. On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0,99 ; 1,01[$ donc $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0,00543$.

c. D'après les questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$ est $2^7 \ln(u_7)$ soit $2^7 \times 0,00543$ c'est à dire 0,695.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = 2**n *(a-1)
    return L
```

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 3

Amérique du Nord - sujet 2 secours - 22 mai 2025

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Voici le tableau complété (on peut calculer rapidement les termes à la main, puis vérifier à la calculatrice) :

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| u_n | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{32}$ |

2. Par exploration à la calculatrice, les termes de la suite semblent décroître, tout en restant strictement positifs, on a $u_{100} \approx 8 \times 10^{-29}$, et $u_{1000} \approx 9 \times 10^{-299}$.

On suppose que la suite converge vers 0.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

1. On a : $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.

2. On va établir la relation de récurrence de (w_n) . Soit n un entier naturel.

$$w_{n+1} = u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1)$$

$$= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$$

$$= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u.$$

$$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

$$= \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3. Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

4. Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n$$

$$\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Pour tout n entier naturel, on pose : P_n l'affirmation : « $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Pour un entier naturel n donné, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de la question B. 4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n) \\ u_{n+1} &= (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n , la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{d'après la question B. 5.} \\ &= (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times ((n+1) - 2n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n) \end{aligned}$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est égale au produit de deux nombres de signe contraire, car, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement;
- $(1-n)$ est négatif ou nul

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc négative ou nulle pour tout n supérieur ou égal à 1, on en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. L'expression du terme général de la suite (u_n) permet d'affirmer que la suite est minorée par 0, car chaque terme est le produit de n , entier naturel, donc positif et de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, strictement positif, car $\frac{1}{2}$ est strictement positif.

De plus, la suite est décroissante, à partir du rang $n = 1$.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0 : on en déduit qu'elle converge, vers une limite ℓ dont on sait que $\ell \geq 0$.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

$$\begin{aligned}
\text{Résolvons cette équation : } \ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell \\
&\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0 \\
&\iff \frac{1}{4}\ell = 0 \\
&\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0
\end{aligned}$$

L'équation ayant une unique solution, puisque la limite doit être une solution de l'équation, on a donc la limite de la suite (u_n) qui est 0, l'unique solution de l'équation.

Cela vient confirmer notre conjecture de la **partie A**.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 4

Asie 11 juin 2025 - sujet 1

Partie A

1. On a : $u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6$.

Après deux prises du médicament, le patient a 3,6 mL de médicament dans son organisme.

2. Pour tout entier naturel non nul n , on pose P_n , l'affirmation : « $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ ».

Initialisation : On a, d'une part : $u_1 = 2$, d'après l'énoncé.

Et, d'autre part : $10 - 8 \times 0,8^{1-1} = 10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 \times 1 = 2$.

On constate que pour $n = 1$, l'affirmation P_1 est vraie.

Hérédité : Pour n entier naturel non nul, on suppose l'affirmation P_n vraie, c'est-à-dire : « $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ ».

On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.

On a : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$ par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned}
&= 2 + 0,8(10 - 8 \times 0,8^{n-1}) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= 2 + 0,8 \times 10 - 0,8 \times 8 \times 0,8^{n-1} \\
&= 2 + 8 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n-1} \\
&= 10 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n-1} \quad \text{c'est l'égalité } P_{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 1, et, pour tout rang naturel non nul n , si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on a donc démontré que P_n est vraie pour tout entier naturel n non nul, autrement dit, on a établi une expression explicite du terme général de la suite.

3. Par connaissance des limites des suites géométriques, comme on a $-1 < 0,8 < 1$, on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -8 \times 0,8^{n-1} = 0$.

Par limite de la somme, on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} = 10 + 0 = 10$.

La suite (u_n) converge donc vers 10.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un nombre important de prises de ce médicament, l'organisme du patient contiendra une quantité de médicament qui tend vers les 10 mL.

4. Soit N un entier naturel non nul, étudions l'inéquation :

$$\begin{aligned} u_N \geq 10 &\iff 10 - 8 \times 0,8^{N-1} \geq 10 \\ &\iff -8 \times 0,8^{N-1} \geq 0 \end{aligned}$$

Le membre de gauche est un réel strictement négatif (car 8 et 0,8 sont strictement positifs) et ne peut être supérieur ou égal à 0.

L'inéquation n'admet donc pas de solution.

Dans le contexte de l'exercice, cela peut s'interpréter sur le comportement de la suite, qui est donc majorée (strictement) par 10, ou par la quantité de médicament dans l'organisme de l'individu qui est toujours strictement inférieure à 10 mL, quel que soit le nombre de prises du médicament enchaînées.

5. On résout une inéquation différente, avec n un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} u_n > 9 &\iff 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9 \\ &\iff -8 \times 0,8^{n-1} > -1 \\ &\iff 0,8^{n-1} < \frac{1}{8} \quad \text{car } -8 < 0 \\ &\iff \ln(0,8^{n-1}) < \ln\left(\frac{1}{8}\right) \quad \text{la fonction } \ln \text{ étant strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff (n-1)\ln(0,8) < -\ln(8) \quad \text{d'après les propriétés de la fonction } \ln \\ &\iff n-1 > -\frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \quad \text{car } \ln(0,8) < 0 \\ &\iff n > 1 - \frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \end{aligned}$$

Or, $1 - \frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \approx 10,3$.

Comme on résout pour n entier naturel non nul, les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 11.

C'est à partir de 11 prises successives du médicament que la quantité de celui-ci dans l'organisme du patient dépasse strictement les 9 mL.

Partie B

1. On a $S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = 2,8$.
2. Pour donner l'expression explicite de la somme, on utilisera l'expression explicite du terme général de la suite (u_n) , établi à la question A. 2..

La somme est une somme de n termes consécutifs, de u_1 à u_n :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n &= 10 - 8 \times 0,8^0 + 10 - 8 \times 0,8^1 + \dots + 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \\ &= 10 + 10 + \dots + 10 - 8 \times (0,8^0 + 0,8^1 + \dots + 0,8^{n-1}) \\ &= 10 \times n - 8 \times 1 \times \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} \quad \text{formule connue} \\ &= 10n - \frac{8}{0,2} \times (1 - 0,8^n) \\ &= 10n - 40 \times (1 - 0,8^n) \\ &= 10n - 40 + 40 \times 0,8^n \quad \text{en développant} \end{aligned}$$

On arrive donc bien à l'expression annoncée.

3. On déduit de la question précédente que, pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$S_n = 10 - \frac{40}{n} + \frac{40}{n} \times 0,8^n.$$

On a donc, par limite du quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40}{n} = 0,$

de plus, par limite des suites géométriques, comme $-1 < 0,8 < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0.$

Ainsi, par limite de la somme et du produit, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 10 - \frac{40}{n} + \frac{40}{n} \times 0,8^n = 10.$$

La quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du patient tend elle aussi vers 10mL.

4. La fonction mystère est une fonction de seuil : elle détermine l'indice seuil pour lequel la valeur de S_n franchit le seuil k pour la première fois.

mystere(9) renvoie donc le premier nombre entier naturel non nul n pour lequel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme du patient depuis le début de la prise devient supérieure ou égale à 9 mL.

5. Cette valeur est donc nécessairement strictement supérieure à 10, puisque l'on a établi à la fin de la **partie A** que c'est seulement à la onzième prise du médicament que la quantité **à ce moment là** dans le corps du patient dépasse les 9 mL.

Avant $n = 11$, les valeurs de la suite (u_n) sont donc toutes inférieures strictement à 9, et donc leur moyenne le sera aussi.

Il est donc impossible que S_n soit supérieur à 9 pour tout entier naturel non nul n , pour n inférieur ou égal à 10.

La fonction mystère doit donc renvoyer une valeur (un indice) strictement supérieur à 10. Elle renverra en réalité 40 (on a $S_{39} \approx 9,97$ et $S_{40} \approx 9,0001$).

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 5

Asie 12 juin 2025 - sujet 2

Partie A

1. $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 15 + 10 = 25$ et $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 12,5 + 10 = 22,5.$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \left(\frac{1}{2}u_n + 10\right) - 20 = \frac{1}{2}u_n - 10 = \frac{1}{2}(u_n - 20) = \frac{1}{2}v_n.$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10.$

3. Pour tout entier n , $v_n = v_0 \times q^n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4. Pour tout entier n , $u_n = v_n + 20 = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 20 = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n , avec $0 < q < 1$) donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$

Partie B

- $w_1 = \frac{1}{2} \times u_0 + \frac{1}{2} \times 30 + 7 = \frac{1}{2} \times 45 + 15 + 7 = 22,5 + 22 = 44,5$
- La fonction Python donnée ne calcule pas correctement w_1 car elle calcule u_1 avant de calculer w_1 il faut modifier l'ordre des opérations :

```
def suite(n):  
    U = 30  
    W = 45  
    for i in range(1, n+1):  
        W = W/2 + U/2 + 7  
        U = U/2 + 10  
    return W
```

- (a)

Initialisation : Pour $n = 0$, $w_0 = 45$ et $10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 11 + 34 = 45$
donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$.

Alors $w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n + \frac{1}{2} u_n + 7 = \frac{1}{2} \left[10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34 \right] + \frac{1}{2} \left[20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + 7$

donc $w_{n+1} = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7 =$

$10(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$

donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 0$ et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$ donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n .

Pour tout entier naturel n , $w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$. (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{n} = 0$ et pour tout entier $n \geq 4$, $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$ donc d'après le théorème d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (q^n avec $0 < q < 1$ donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$)

donc par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 34$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 6

Centres étrangers 12 juin 2025 - sujet 1

Partie A:

1. D'une part : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+ \\ \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty \end{cases}$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow -1} 4 \ln(x + 1) = -\infty$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2}{25} = -\frac{1}{25}$
 donc par somme $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

2. f est dérivable sur $] - 1 ; +\infty[$.

f est de la forme $4 \ln(u) - v$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \frac{x^2}{25}$.

On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{2x}{25}$

Or $f' = 4 \frac{u'}{u} - v'$ donc :

Pour tout x appartenant à l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = 4 \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4 \times 25 - (x+1)2x}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Pour tout x appartenant à l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

$25(x+1) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100 - 2x - 2x^2$, fonction polynôme du second degré donc le coefficient dominant (-2) est négatif.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 100 \times (-2) = 804 > 0$$

$100 - 2x - 2x^2 = 0$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{804}}{2(-2)} = \frac{-1 + \sqrt{201}}{2} \approx 6,6$$

$$\text{et } x_2 = \frac{2 + \sqrt{804}}{2(-2)} = \frac{-1 - \sqrt{201}}{2} \approx -7,6 < -1$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

| | | | |
|-------------------|---|-------|-----------|
| x | -1 | x_1 | $+\infty$ |
| signe de $f'(x)$ | + | 0 | - |
| variations de f | $-\infty \swarrow \quad \nearrow f(x_1) \quad \searrow$ | | |

$[2 ; 6,5] \subset] - 1 ; x_1[$ donc f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$.

4. $h(2) = f(2) - 2 = 4 \ln(2 + 1) - \frac{2^2}{25} - 2 \approx 2,23$.

Sur l'intervalle $[2 ; m]$ la fonction h est strictement croissante, or $h(2) > 0$ donc sur $[2 ; m]$, $h(x) > 0$ et l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[m ; 6,5]$, la fonction h est strictement décroissante et continue.

$$h(m) = M \approx 2,265 > 0$$

$$\text{et } h(6,5) = 4 \ln(6,5 + 1) - \frac{6,5^2}{25} - 6,5 \approx -0,13 < 0$$

0 est donc une valeur intermédiaire entre $h(m)$ et $h(6,5)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotone, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[m ; 6,5]$.

Finalement, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.

5. a. Avec la calculatrice on trouve que les valeurs renvoyées par la commande bornes (2) sont : (6.36, 6.37)

b. Dans le contexte de l'exercice, un encadrement de α est $6,36 < \alpha < 6,37$.

Partie B :

1. Pour tout entier naturel n , on pose P_n , l'affirmation : « $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$. ».

Initialisation : On a, d'une part : $u_0 = 2$,

Et, d'autre part : $u_1 = f(u_0) = f(2) \approx 4,23$

Donc $2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6,5$

Pour $n = 0$, l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n naturel, tel que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire :

« $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$ ».

On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$

Or la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$ donc :

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(6,5)$$

or $f(2) \approx 4,23 > 2$ et $f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$

donc, par définition de la suite u , $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6,5$

c'est l'inégalité P_{n+1}

Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 0, et, pour tout rang naturel non nul, sa véracité est héréditaire, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on peut vérifier l'inégalité P_n pour tout entier naturel n .

2. Pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite u est croissante, de plus pour tout entier n , $u_n \leq 6,5$ donc la suite u est majorée, or toute suite croissante et majorée est convergente, donc la suite (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leq 6,5$.
3. La suite u est une suite convergente vers une limite ℓ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction continue. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ ou $h(x) = 0$
- On sait de plus que cette limite appartient à l'intervalle $[2 ; 6,5]$ et que sur cet intervalle l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α on a donc $\ell = \alpha$.
- On rappelle que le réel α , défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 7

Centres étrangers 13 juin 2025 - sujet 2

Partie A

1. $u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58$.
2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = 0,93$ donc pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n$.
3. La raison q vérifiant $q \in]-1 ; 1[$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,93^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
Interprétation : ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années la population animale dans le milieu A va aller à l'extinction.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$.

En particulier $v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = 4,8$.

Il y aura donc 4 800 individus au 1^{er} janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$.

2. La fonction f est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.

$\forall x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = -0,1x + 1,1$.

$$f'(x) \geq 0 \iff -0,1x + 1,1 \geq 0 \iff x \leq \frac{1,1}{0,1} \iff x \leq 11.$$

Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.

3. Nous savons que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$. Montrons par récurrence que : $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

— **Initialisation** : $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$ donc $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 6$. La proposition est vraie au rang 0.

— **Hérédité** : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

Comme $v_n \in [0; 11]$, $v_{n+1} \in [0; 11]$, et que f est croissante sur $[0; 11]$ d'après le résultat précédent, les images des quatre nombres de l'encadrement sont rangées dans le même ordre croissant, soit

$$f(2) \leq f[v_{n+1}] \leq f[v_n] \leq f(6) \iff 2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 4,8 \text{ (car } f(2) = -0,05 \times 2^2 + 2,2 = -0,2 + 2,2 = 2).$$

On a donc $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6$. La proposition est vraie au rang $n + 1$.

— **Conclusion** : La proposition est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n + 1$. D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

4. Le résultat précédent montre deux résultats : pour tout entier naturel n ,

— $v_{n+1} \leq v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante;

— $2 \leq v_n$ donc la suite (v_n) est minorée par 2.

D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) converge vers une limite $\ell \geq 2$.

5. a. La fonction f est continue, $(f([2; 6]) \subset [2; 6])$ et la suite (v_n) converge, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ est l'unique solution sur $[2; 6]$ de l'équation $f(x) = x$.

b. On résout l'équation $\ell = f(\ell)$:

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = -0,05\ell^2 + 1,1\ell \iff 0,05\ell^2 - 0,1\ell = 0 \iff 0,05\ell(\ell - 2) = 0$$

On obtient deux solutions : $\ell = 0 \notin [2; 6]$ et $\ell = 2$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

Ceci signifie qu'au bout d'un certain nombre d'années la population va se rapprocher de 2 000 individus, soit le tiers du nombre initial.

Partie C

- En milieu A, on utilise la suite (u_n) . On cherche à résoudre $u_n < 3$.
 $u_n < 3 \iff 6 \times 0,93^n < 3 \iff 0,93^n < \frac{1}{2}$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $]0; +\infty[$ donc $0,93^n < \frac{1}{2} \iff \ln(0,93^n) < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff n \times \ln(0,93) < -\ln(2)$
 $\iff n > -\frac{\ln(2)}{\ln(0,93)}$ car $\ln(0,93) < 0$.
Or $-\frac{\ln(2)}{\ln(0,93)} \approx 9,55$ donc $n \geq 10$ soit en 2035.
À partir de 2035, le nombre d'individus en milieu A sera inférieur à 3 000.
- On sait que (v_n) est décroissante. Avec la calculatrice, on trouve $v_5 \approx 3,14$ et $v_6 \approx 2,96$. Donc pour $n \geq 6$.
Ce sera donc à partir de 2031.
- La suite (u_n) converge vers 0, et (v_n) converge vers 2. Les deux suites étant décroissantes en partant de $u_0 = v_0 = 6$, il existera un rang N tel que $v_N > u_N$.
- Le script complété :

```

n=0
u = 6
v = 6
while u >= v :
    u = 0.93*u
    v = -0.05*v**2+1.1*v
    n = n+1
print (2025 + n)

```

- Le script affiche 2038. Avec la calculatrice : $u_{12} \approx 2,51$ et $v_{12} \approx 2,41$; $u_{13} \approx 2,34$ et $v_{13} \approx 2,36$. Donc $N = 13$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 8

Métropole 17 juin 2025 - sujet 1

Partie A : étude d'un modèle discret

- Le premier juillet 2025 étant le premier juillet 2024 + 1, on demande ici de calculer :
 $u_1 = u_{0+1} = -0,02u_0^2 + 1,3u_0 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = 1,3 - 0,02 = 1,28$.
D'après ce modèle, au premier juillet 2025, la posidonie recouvrera une superficie de 1,28 ha.
- On remarque que la fonction h introduite dans la question est la fonction de récurrence de la suite, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $h(u_n) = u_{n+1}$.
Pour tout entier naturel n , on pose l'affirmation P_n : « $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$. »
Initialisation : pour $n = 0$, on a, d'après la définition de la suite $u_0 = 1$ et d'après la question précédente $u_1 = 1,28$.
On constate donc que l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose que, pour un entier naturel n , l'affirmation P_n est vraie.

Par hypothèse, on a donc :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20 \implies h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20)$$

car h est supposée croissante sur $[0 ; 20]$

$$\implies 1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18 \quad \text{car } h(1) = 1,28 \text{ et } h(20) = 18.$$

$$\implies 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20 \quad \text{car } 1 \leq 1,28 \text{ et } 18 \leq 20.$$

Si P_n est vraie, alors P_{n+1} est donc vraie aussi.

Conclusion : On a établi que la propriété était vraie au rang 0, et que, pour n naturel n , P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc d'après le principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

3. D'après la question précédente, on a :

— $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 20$: la suite est bornée par 1 et 20;

— $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$: la suite est croissante;

La suite est donc croissante et majorée, elle est donc convergente, vers une limite L .

Comme la suite est bornée par 1 et 20, on en déduit que la limite L est donc un réel de l'intervalle $[1 ; 20]$.

4. La suite u est définie par récurrence, sa fonction de récurrence étant continue (la fonction h est un polynôme de degré 2, donc continue sur son ensemble de définition); la suite est également convergente. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite de la suite (u_n) doit être une solution à l'équation $h(x) = x$.

Résolvons cette équation : $h(x) = x \iff -0,02x^2 + 1,3x = x$

$$\iff -0,02x^2 + 0,3x = 0$$

$$\iff -0,02x \left(x + \frac{0,3}{-0,02} \right) = 0$$

$$\iff -0,02x(x - 15) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou bien } x = 15$$

L'équation a deux solutions, 0 et 15, et parmi ces deux solutions, seule 15 est dans l'intervalle $[1 ; 20]$, dont on a établi qu'il contient la limite L .

La limite de la suite est donc bien $L = 15$.

5. a. Puisque la suite converge vers 15, tout intervalle ouvert contenant 15 doit contenir tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.

L'intervalle $]14 ; +\infty[$ est un tel intervalle, donc il existe un rang N_0 à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle $]14 ; +\infty[$, et sont donc supérieurs à 14.

Il existe donc une année à partir de laquelle la posidonie recouvrira une surface dépassant les 14 ha.

b. Il s'agit ici d'un algorithme de seuil classique, n et u sont initialisées à 0 et u_0 respectivement. Tant que le terme stocké dans la variable u restera inférieur ou égal à 14, alors on mettra à jour ces deux variables pour qu'elles contiennent respectivement l'indice suivant et le terme suivant dans la suite.

Cela donne :

```
def seuil():
n=0
u=1
while u <= 14 :
```

```

n= n+1
u= -0.02*u**2 + 1.3*u
return n

```

Remarque : Il y a une légère ambiguïté sur l'interprétation de l'expression « dépassera les 14 hectares ». On a choisi dans ce corrigé de le comprendre comme « devenant strictement supérieur à 14 hectares ».

Si on interprète comme « devenant supérieur ou égal à 14 hectares », alors la quatrième ligne de l'algorithme devient : `while u < 14` : Les deux versions renvoient le même résultat, de toutes façons, car aucun terme de la suite n'est égal à 14.

L'appel `seuil()` renvoie ici 18, car $u_{17} \approx 13,8$ et $u_{18} \approx 14,1$. Il faudra donc 18 ans pour que la posidonie recouvre une surface dépassant les 14 hectares.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. Si on a, pour tout réel positif t , $g = \frac{1}{f(t)}$, alors pour tout réel t positif, on a :

$$g'(t) = \frac{-f'(t)}{f(t)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{On aura alors : } -0,3g(t) + 0,02 &= \frac{-0,3}{f(t)} + 0,02 \\ &= \frac{-0,3 + 0,02f(t)}{f(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et, par ailleurs : } g'(t) &= \frac{-f'(t)}{f(t)^2} \\ &= \frac{-[0,02f(t)(15 - f(t))]}{f(t)^2} \quad \text{car } f \text{ est solution de } (E_1) \\ &= \frac{-[0,02(15 - f(t))]}{f(t)} \quad \text{en simplifiant par } f(t) \\ &\quad \text{on rappelle que } f \text{ ne s'annule pas sur } [0; +\infty[\\ &= \frac{-0,3 + 0,02f(t)}{f(t)} \quad \text{en développant} \\ &= -0,3g(t) + 0,02 \end{aligned}$$

On constate bien que g est une solution de l'équation différentielle (E_2) .

2. Les solutions de l'équation (E_2) sont, d'après une propriété du cours, les fonctions de la forme : $t \mapsto Ce^{-0,3t} + \frac{-0,02}{-0,3}$, où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire, les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{-0,3t} + \frac{1}{15}$, où $C \in \mathbb{R}$.

3. Comme on sait que $f(0) = 1$, on en déduit $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } g(0) = 1 &\iff Ce^{-0,3 \times 0} + \frac{1}{15} = 1 \\ &\iff C + \frac{1}{15} = 1 \\ &\iff C = 1 - \frac{1}{15} \\ &\iff C = \frac{14}{15} \end{aligned}$$

La seule fonction solution de (E_2) vérifiant $g(0) = 1$ est donc

$$g : t \mapsto \frac{14}{15} e^{-0,3t} + \frac{1}{15}.$$

On en déduit donc que, pour tout t réel positif, on a : $f(t) = \frac{1}{g(t)}$

$$= \frac{1}{\frac{14}{15} e^{-0,3t} + \frac{1}{15}}$$

$$= \frac{15}{14 e^{-0,3t} + 1}$$

On arrive bien à l'expression annoncée.

4. On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,3t = -\infty$, donc par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,3t} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$

Par limite du produit et de la somme, on a alors : $\lim_{t \rightarrow +\infty} 14 e^{-0,3t} + 1 = 1$.

Finalement, par limite du quotient : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15}{14 e^{-0,3t} + 1} = 15$.

La fonction f tend vers 15 quand t tend vers $+\infty$. Le modèle continu rejoint la conclusion du modèle discret : la posidonie tendra à occuper une surface de 15 hectares.

5. Soit t un réel positif. Résolvons :

$$f(t) > 14 \iff \frac{15}{14 e^{-0,3t} + 1} > 14$$

$$\iff 15 > 14(14 e^{-0,3t} + 1) \quad \text{car } 14 e^{-0,3t} + 1 > 0$$

$$\iff 15 > 196 e^{-0,3t} + 14$$

$$\iff 1 > 196 e^{-0,3t}$$

$$\iff \frac{1}{196} > e^{-0,3t} \quad \text{car } 196 > 0$$

$$\iff \ln\left(\frac{1}{196}\right) > -0,3t \quad \text{car } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$\iff -\ln(196) > -0,3t \quad \text{par propriété de la fonction } \ln$$

$$\iff \frac{\ln(196)}{0,3} < t \quad \text{car } -0,3 < 0$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $\left] \frac{\ln(196)}{0,3} ; +\infty \right[$.

Comme $\frac{\ln(196)}{0,3} \approx 17,6$, cela signifie qu'il faudra environ 17,6 années (soit 17 ans et un peu plus de 7 mois) pour que la posidonie occupe un espace strictement supérieur à 14 hectares. Là encore, le modèle continu a des conclusions cohérentes avec celles du modèle discret.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 9

Polynésie 17 juin 2025 - sujet 1

Exercice 3

5 points

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

1. a. On dérive un produit de deux fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$. Soit x un réel positif :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= nx^{n-1} \times e^{-x} + x^n \times (-e^{-x}) = (nx^{n-1} - x^n) e^{-x} \\ &= (n \times x^{n-1} - x \times x^{n-1}) e^{-x} = (n-x)x^{n-1} e^{-x} \end{aligned}$$

- b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur \mathbb{R} , donc

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad e^{-x} > 0;$$

Sur $[0; +\infty[$, x est donc positif, et donc x^{n-1} est positif aussi;

Ainsi, $f'_n(x)$ est du signe du facteur $(n-x)$.

On a $n-x > 0 \iff n > x$, donc c'est pour cela que l'on a bien $f'_n(x) > 0$ sur $[0; n[$, de façon immédiate, $f'_n(n) = 0$ et, par élimination, $f'_n(x) < 0$ sur $]n; +\infty[$.

Le signe de $f'_n(x)$ est donc justifié.

Par conséquent, on en déduit les variations de f_n : sur $[0; n]$, f'_n est à valeurs positives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x = n$), donc f_n est strictement croissante sur $[0; n]$.

Sur $[n; +\infty[$, f'_n est à valeurs négatives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x = n$), donc f_n est strictement décroissante sur $[n; +\infty[$.

On calcule les images de 0 et n par f_n :

- $f_n(0) = 0^n \times e^{-0} = 0 \times 1 = 0$;
- $f_n(n) = n^n \times e^{-n} = n^n \times \frac{1}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$;

Enfin, calculons la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$:

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f_n(x) = x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}}$$

La propriété des croissances comparées dit que, pour tout n naturel non nul :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty;$$

Par limite du quotient, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}} = 0$.

La courbe \mathcal{C}_n admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

On a ainsi justifié tous les éléments de ce tableau de variations.

2. Pour n entier naturel non nul, on a : $f_n(1) = 1^n \times e^{-1} = 1 \times e^{-1} = e^{-1}$.

Cela confirme que la courbe \mathcal{C}_n contient bien le point $A(1; e^{-1})$.

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x) dx$ pour $n \geq 0$

1. a. La fonction f_0 est à valeurs positives sur $[0; 1]$, donc I_0 correspond à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par : la courbe \mathcal{C}_0 , l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
- b. De la même façon, chaque intégrale I_n est la surface délimitée par la courbe \mathcal{C}_n , l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Graphiquement, on conjecture que chacune de ces surface est incluse dans celles correspondant à un entier n plus petit, donc les aires sont de plus en

plus petites, et la suite (I_n) semble décroître, en étant minorée par 0, la suite serait convergente, vers une limite positive, proche de 0, ou vers 0, en effet, l'aire sous la courbe \mathcal{C}_{100} est déjà très faible.

$$\begin{aligned} 2. \text{ On a : } I_0 &= \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1 \\ &= (-e^{-1}) - (-e^{-0}) = -e^{-1} + e^0 \\ &= 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

3. a. Soit n un entier naturel.

$$x \in [0; 1] \implies 0 \leq x \leq 1$$

$$\implies 0 \times x^n \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n, \quad \text{car } x^n \geq 0$$

$$\implies 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

On arrive bien à l'inégalité demandée.

b. Soient n un entier naturel et x un réel de $[0; 1]$. En multipliant l'inégalité précédente par e^{-x} , qui est un nombre réel supérieur à zéro, il vient :

$$0 \leq x^{n+1} e^{-x} \leq x^n e^{-x} \quad \text{soit } 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

Comme on intègre entre 0 et 1, avec $0 < 1$, par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{soit } 0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

4. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n , simultanément :

— $0 \leq I_n$, donc la suite (I_n) est minorée par 0;

— $I_{n+1} \leq I_n$, donc la suite (I_n) est décroissante;

La suite étant décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente, vers une limite ℓ supérieure ou égale à 0.

5. Soit n un entier naturel n .

$$\text{On pose : } \begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(x) dx = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = \int_0^1 u(x) \times v'(x) dx \\ &= \left[u(x) \times v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 u'(x) \times v(x) dx \quad \text{formule d'intégration par parties} \\ &= \left[x^{n+1} \times (-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times (-e^{-x}) dx \\ &= (-1^{n+1} \times e^{-1}) - (-0^{n+1} \times e^{-0}) + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx \quad \text{par linéarité} \\ &= (n+1)I_n - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence annoncée.

6. a. Supposons que la limite ℓ est supérieure à zéro.

$$\text{Alors, par limite du produit, on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n = +\infty$$

$$\text{Puis par limite de la somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)I_n - \frac{1}{e} = +\infty.$$

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = +\infty$, autrement dit, la suite de terme général I_{n+1} **diverge** vers $+\infty$.

Or la suite de terme général I_{n+1} a la même limite que la suite de terme général I_n , qui elle **converge** vers un réel positif ℓ (dont on peut dire qu'il est inférieur à $I_0 = 1 - e^{-1}$).

L'unicité de la limite est donc en contradiction avec ces résultats.

- b. Dans la question précédente, on a fait une supposition non étayée : on a supposé $\ell > 0$. Cette supposition conduisant à une contradiction, cela démontre, par l'absurde que l'on a $\ell \leq 0$.

Comme on savait, depuis la question 4., que ℓ est un réel positif, on peut donc en déduire que l'on a : $\ell = 0$.

La suite (I_n) converge donc vers 0.

7. Ici, l'appel mystère (100) renvoie une liste (stockée dans la variable L) contenant les valeurs (approchées) des 101 premiers termes de la suite, de I_0 à I_{100} .

En effet, I est initialisée (ligne 2) à la valeur I_0 , puis L est initialisée (ligne 3) en tant que liste contenant la valeur I_0 .

Ensuite, on rentre dans un boucle à $n = 100$ répétitions (pour i allant de 0 à 99), et dans chaque exécution, la variable I est mise à jour (ligne 5) en utilisant la relation de récurrence de la suite (I_n) , donc passe de la valeur d'un terme à la valeur du terme suivant dans la suite (I_n) . Cette nouvelle valeur est ensuite ajoutée à la fin de la liste L (ligne 7).

En sortie de boucle, on a donc appliqué 100 fois la relation de récurrence, donc la variable I contient bien la valeur (approchée de) $I_{0+100} = I_{100}$, qui a été la dernière ajoutée à la liste L.

Remarque ⚠

Si on fait effectivement tourner le script Python donné dans l'énoncé, les résultats sont manifestement faux à partir de $n = 18$ puisque les valeurs trouvées deviennent négatives!

Les calculs se font avec une valeur approchée de e et les erreurs se cumulent assez rapidement.

Les calculs effectués sur tableur ne donnent pas de meilleurs résultats.

En revanche, si on calcule les aires sous la courbe avec GeoGebra, les résultats semblent corrects, et la suite des intégrales tend effectivement vers 0.

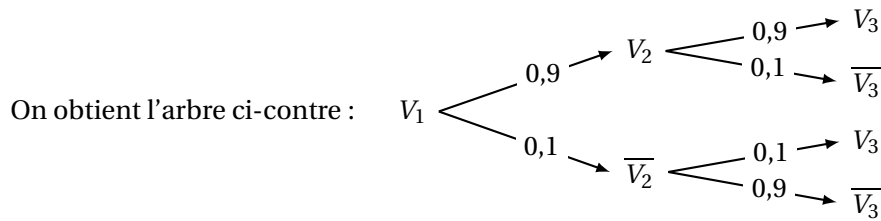
ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 10

Polynésie 18 juin 2025 - sujet 2

L'énoncé annonce des proportions, on va modéliser la situation de probabilité en assimilant les proportions à des probabilités.

Partie A

1. a. D'après l'énoncé, on a donc : $P(V_1) = 1$ et, pour tout n naturel supérieur ou égal à 2 : $P_{V_{n-1}}(V_n) = 0,9$ et aussi $P_{V_{n-1}}(\overline{V_n}) = 0,9$. (une transmission fidèle, c'est quand les machines $n - 1$ et n détiennent la même valeur).



- b. Les évènements V_2 et $\overline{V_2}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$P(V_3) = P(V_3 \cap V_2) + P(V_3 \cap \overline{V_2}) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,1 = 0,81 + 0,01 = 0,82.$$

On arrive bien à $P(V_3) = 0,82$.

- c. On demande de calculer : $P_{V_3}(V_2)$.

$$\text{D'après la définition, on a : } P_{V_3}(V_2) = \frac{P(V_3 \cap V_2)}{P(V_3)} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,82} = \frac{81}{82} \approx 0,988.$$

À 10^{-3} près, la probabilité que la machine 2 détienne 1, sachant que la machine 3 détient 1 est d'environ 0,988.

2. a. Soit n un entier naturel non nul.

Les évènements V_n et $\overline{V_n}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(V_{n+1}) \\ &= P(V_{n+1} \cap V_n) + P(V_{n+1} \cap \overline{V_n}) \\ &= P_{V_n}(V_{n+1}) \times P(V_n) + P_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) \times P(\overline{V_n}) \\ &= 0,9 \times P(V_n) + 0,1 \times P(\overline{V_n}) \\ &= 0,9 \times p_n + 0,1 \times (1 - p_n) \\ &= 0,9p_n + 0,1 - 0,1p_n \\ &= 0,8p_n + 0,1 \end{aligned}$$

On arrive donc bien à la relation de récurrence annoncée pour la suite (p_n) .

- b. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

P_n est l'affirmation : « $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$ ».

Initialisation : on a, d'après l'énoncé : $p_1 = 1$,

et, par ailleurs, on a : $0,5 \times 0,8^{1-1} + 0,5 = 0,5 + 0,5 = 1$.

On constate donc que l'affirmation P_1 est vraie.

Hérédité : soit n naturel non nul tel que l'affirmation P_n est vraie, soit :

$$\begin{aligned} p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5 &\implies 0,8p_n = 0,8(0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5) \\ &\implies 0,8p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} \times 0,8 + 0,4 \\ &\implies 0,8p_n = 0,5 \times 0,8^n + 0,4 \\ &\implies 0,8p_n + 0,1 = 0,5 \times 0,8^n + 0,4 + 0,1 \\ &\implies 0,8p_n + 0,1 = 0,5 \times 0,8^n + 0,5 \\ &\implies p_{n+1} = 0,5 \times 0,8^n + 0,5 \quad \text{c'est } P_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : on a prouvé que l'affirmation P_1 est vraie, et que, n étant un naturel non nul, la véracité de P_n entraîne celle de P_{n+1} . En vertu du principe de récurrence, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

Autrement dit, on a établi par récurrence une expression explicite du terme général p_n .

c. Pour tout n entier naturel non nul, on a : $0,5 \times 0,8^{n-1} = \frac{0,5}{0,8} \times 0,8^n$
 $= 0,625 \times 0,8^n$.

Comme on a : $-1 < 0,8 < 1$ la propriété des limites de suites géométriques donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,625 \times 0,8^n = 0$.

Puis, par limite de la somme, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,625 \times 0,8^n + 0,5 = 0,5$.

Ainsi, quand le nombre de machines tend vers plus l'infini, la probabilité que la dernière machine détienne la valeur 1 tend vers 0,5.

Partie B

1. L'instruction de la ligne 5 est une instruction conditionnelle : elle indique l'instruction de la ligne suivante ne s'exécutera qu'à la condition que le test `rand() < 0.1` renvoie la valeur True.

Or, l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire dans $[0 ; 1[$, donc la probabilité que ce nombre soit strictement inférieur à 0,1, c'est-à-dire dans l'intervalle $[0 ; 0,1[$ est proportionnelle à l'amplitude de cet intervalle, la probabilité que cela arrive est donc de $\frac{0,1 - 0}{1 - 0} = 0,1$.

La ligne 5 va rendre l'exécution de la ligne 6 aléatoire, avec une probabilité que la ligne 6 s'exécute égale à 0,1.

C'est-à-dire que la ligne 6 doit avoir pour effet de "mal transmettre" la dernière donnée détenue, qui est stockée dans la variable `donnee`. Cette variable contient 0 ou 1. Si elle contenait 0, après la ligne 6 elle contiendra $1 - 0 = 1$, soit la valeur contraire. Si elle contenait 1, après la ligne 6, elle contiendra $1 - 1 = 0$, là encore, la valeur contraire.

La ligne 6 a donc pour effet de modifier la donnée, pour simuler une transmission contraire.

2. Si l'appel `simulation(4)` renvoie `[1, 1, 1, 1, 1]`, cela signifie que l'on a eu 4 transmissions fidèles, entre 5 machines.

La probabilité que cela arrive est donc :

$$0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,9^4 = 0,6561 \approx 0,656.$$

De façon analogue l'appel `simulation(6)` renvoie une simulation de 6 transmissions entre 7 machines.

Si l'appel renvoie `[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]`, cela signifie que les trois premières transmissions sont contraires (de 1 à 0, puis de 0 à 1, puis de 1 à 0), la quatrième transmission est fidèle (de 0 à 0), la cinquième est contraire (de 0 à 1) et la sixième et dernière est fidèle (de 1 à 1).

La probabilité que cela arrive est donc :

$$0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,9 \times 0,1 \times 0,9 = 0,9^2 \times 0,1^4 = 8,1 \times 10^{-5} \approx 0,000.$$

À 10^{-3} près, la probabilité d'obtenir `[1, 1, 1, 1, 1]` est d'environ 0,656, celle d'obtenir `[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]` est d'environ 0,000.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE I I

Polynésie 2 septembre 2025 - sujet 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout n : $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3)$

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. On complète le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n) .

```
def suite(k):  
    L = []  
    u = 5  
    for i in range(k):  
        L.append(u)  
        u = 2 + log( u**2 - 3 )  
    return(L)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous.

```
>>> suite(9)  
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,  
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,  
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

La suite (u_n) semble croissante, mais on ne peut pas se prononcer sur sa limite.

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé 1.

```
def mystere(n):  
    L = suite(n)  
    c = 1  
    for i in range(n - 1):  
        if L[i] > L[i + 1]:  
            c = 0  
    return c
```

La fonction `mystere` renvoie 0 s'il existe un indice i pour lequel $L[i] > L[i+1]$, c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$. Comme `mystere(10000)` renvoie 1, cela veut dire que pour tout $i \leq 9999$, on a : $u_i \leq u_{i+1}$.

Cela ne contredit pas la conjecture faite sur la croissance de la suite (u_n) .

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par : $g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$.

1. $g'(x) = 0 + \frac{2x}{x^2 - 3} = \frac{2x}{x^2 - 3}$

Sur $[2; +\infty[$, $2x > 0$ et $x^2 > 4$ donc $x^2 - 3 > 1 > 0$; donc $g'(x) > 0$ sur $[2; +\infty[$, ce qui prouve que la fonction g est croissante sur $[2; +\infty[$.

2. a. On démontre par récurrence que la propriété $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ est vraie pour tout entier naturel n .

• **Initialisation**

$$u_0 = 5 \text{ et } u_1 = 2 + \ln(5^2 - 3) = 2 + \ln(22) \approx 5,09$$

Donc $4 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6$; la propriété est vraie au rang 0.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

D'après la définition de la fonction g , on a $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n .

On sait que la fonction g est croissante sur $[2; +\infty[$; donc de l'inégalité $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$, on déduit $g(4) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(6)$.

$$g(4) \approx 4,56; g(u_n) = u_{n+1}; g(u_{n+1}) = u_{n+2} \text{ et } g(6) \approx 5,5$$

On a donc $4,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 5,5$, ce qui entraîne $4 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$.

La propriété est donc héréditaire.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$ donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc démontré que, pour tout $n : 4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

b. D'après la question précédente, pour tout n , on a :

- $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante;
- $u_n \leq 6$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = 2 + \ln(x^2 - 3) - x$.

On donne le tableau de variations de f suivant.

| | | | | |
|--------|---|---|---|----------|
| x | 2 | 3 | + | ∞ |
| $f(x)$ | | | | |

1. a. D'après le tableau de variations de f , on voit que $f(2) = 0$.

On complète le tableau :

| | | | | | |
|--------|---|---|---|---|----------|
| x | 2 | 3 | β | + | ∞ |
| $f(x)$ | | | | | |

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[2; +\infty[$ que l'on notera $\alpha = 2$ et $\beta \in [3; +\infty[$

b. On a vu que $\alpha = 2$.

À la calculatrice, on trouve successivement :

- $f(5) < 0 < f(6)$ donc $\beta \in [5; 6]$;
- $f(5,1) < 0 < f(5;2)$ donc $\beta \in [5,1; 5,2]$;
- $f(5,16) < 0 < f(5;17)$ donc $\beta \in [5,16; 5,17]$;
- $f(5,164) < 0 < f(5;165)$ donc $\beta \in [5,164; 5,165]$.

Donc 5,164 une valeur approchée à 10^{-3} près de β .

2. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

$$f(x) = g(x) - x \text{ donc } g(x) = x \iff f(x) = 0$$

Pour tout n , on a $g(u_n) = u_{n+1}$ donc, par passage à la limite on a $g(\ell) = \ell$, ce qui équivaut à $f(\ell) = 0$.

$u_0 = 5$ et la suite (u_n) est croissante donc $\ell \geq 5$.

$\ell \geq 5$ et ℓ vérifie $f(\ell) = 0$; d'après les questions précédentes, on peut en déduire que $\ell = \beta$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 12

Asie 5 septembre 2025 - sujet 1

Soit n un entier naturel non nul.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n .

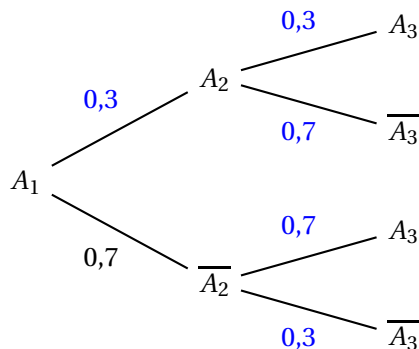
Pour les parties **A** et **B** de l'exercice, on considère que :

- Si l'évènement A_n est réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3.
- Si l'évènement A_n n'est pas réalisé alors l'évènement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7.

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. On complète l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. $\{A_2, \overline{A_2}\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

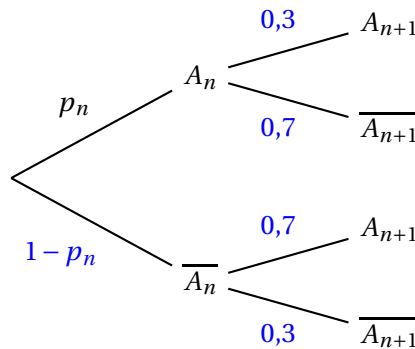
$$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_2} \cap A_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ = 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 = 0,58$$

3. $P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0,3 \times 0,3}{0,58} \approx 0,16$

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geq 1$.

1. On complète l'arbre des probabilités ci-dessous :



2. a. $\{A_n, \overline{A_n}\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) \\ = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ = p_n \times 0,3 + (1 - p_n) \times 0,7 = 0,3p_n + 0,7 - 0,7p_n = -0,4p_n + 0,7$$

On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,5$. Donc $p_n = u_n + 0,5$.

b. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,5 = -0,4p_n + 0,7 - 0,5 = -0,4(u_n + 0,5) + 0,2 = -0,4u_n - 0,2 + 0,2 \\ = -0,4u_n$

$u_1 = p_1 - 0,5 = 1 - 0,5 = 0,5$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = -0,4$ et de premier terme $u_1 = 0,5$.

c. On en déduit que, pour tout n , on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,5 \times (-0,4)^{n-1}$.

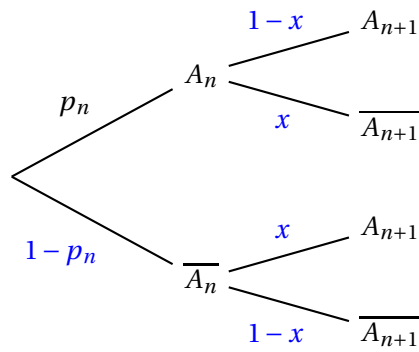
Et donc $p_n = u_n + 0,5 = 0,5 \times (-0,4)^{n-1} + 0,5$.

d. On a : $-1 < -0,4 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,4)^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,5$.

Partie C :

Soit $x \in]0; 1[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}(\overline{A_{n+1}}) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

On représente cette situation par un arbre de probabilités.



1. $\{A_n, \overline{A_n}\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) \\
 &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\
 &= p_n \times (1-x) + (1-p_n) \times x = p_n - xp_n + x - xp_n = (1-2x)p_n + x
 \end{aligned}$$

2. On va démontrer par récurrence que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

• **Initialisation**

Pour $n = 1$, on a $\frac{1}{2}(1-2x)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Or $p_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang n c'est-à-dire que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= (1-2x)p_n + x = (1-2x)\left(\frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}\right) + x \\
 &= (1-2x) \times \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + (1-2x) \times \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2} - x + x \\
 &= \frac{1}{2}(1-2x)^n + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 1$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

On a donc démontré par récurrence sur n que $p_n = \frac{1}{2}(1-2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

3. $0 < x < 1$ donc $-2 < -2x < 0$ et donc $-1 < 1 - 2x < 1$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-2x)^{n-1} = 0$ donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 13

Métropole 9 septembre 2025 - sujet 1

Partie A

1. Pour $x \geq 2$: $3x - 2 \geq 4 > 0$ donc f est bien définie et dérivable.

$$\forall x \in [2; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0$$

f' est à valeurs strictement positives sur $[2; +\infty[$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

$$\text{On a : } f(2) = \sqrt{3 \times 2 - 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Et : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 2 = +\infty,$$

$$\text{donc, par composition (avec } y = 3x + 2) : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x - 2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty.$$

2. a. *Initialisation* : Pour $n = 0$, $u_0 = 6 \geq 2$.

$$\text{de plus : } u_1 = f(6) = \sqrt{3 \times 6 - 2} = \sqrt{16} = 4 \geq 2.$$

Donc on a bien : $2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 6$: l'inégalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que, pour un entier n naturel donné, l'inégalité est vraie, c'est-à-dire : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

Montrons que l'inégalité suivante est vraie, c'est-à-dire : $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6$.

Par hypothèse de récurrence : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

Comme f est croissante sur $[2; +\infty[$: $f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(6)$

D'après la relation de récurrence de (u_n) : $\sqrt{3 \times 2 - 2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3 \times 6 - 2}$.

En effectuant les calculs : $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4$.

Enfin, comme $4 \leq 6$, ce qui précède implique : $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6$.

Si l'inégalité est vraie pour un entier naturel n donné, alors on prouve qu'elle est aussi vraie pour l'indice suivant, $n + 1$.

Conclusion : L'inégalité est vraie pour l'indice $n = 0$, et pour tout n entier naturel, elle est héréditaire. Par application du principe de récurrence, on peut affirmer que, pour tout n entier naturel, on a : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

b. De la question précédente on tire :

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante;

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n$: la suite (u_n) est minorée par 2;

(u_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge vers une limite ℓ qui vérifie : $2 \leq \ell$.

3. Soit x un réel supérieur à 2 :

$$f(x) = x \iff \sqrt{3x-2} = x$$

$$\iff 3x - 2 = x^2 \quad \text{car } x \geq 2 \text{ donc } 3x - 2 \geq 0$$

$$\iff x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\iff (x - 1)(x - 2) = 0$$

Le trinôme du second degré a donc deux racines 1 et 2.

Comme ℓ vérifie $\ell \geq 2$, seule la racine 2 peut être égale à ℓ .

On a donc $\ell = 2$.

4. a. La suite (u_n) converge vers 2, donc tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Un intervalle ouvert contenant 2 est de la forme $]b; a[$, avec $a > 2$, ou a qui est $+\infty$. Donc pour tout $a > 2$, il existe un rang N_0 à partir duquel $u_n < a$.

La boucle `while` se termine donc après N_0 itérations, et `rang(2.000001)` renvoie la valeur N_0 .

Le seul risque que l'algorithme ne se termine pas avec un $a > 2$ serait que le réel a soit trop proche de 2, et que les algorithmes utilisés par python donnent une valeur approchée trop peu précise des différents termes u_n pour que la boucle se termine.

- b.** D'après ce que l'on a expliqué précédemment, l'instruction renvoie un résultat si et seulement si $a > \ell = 2$.

Donc pour $a > 2$.

Partie B

1. On a : $v_1 = 3 - \frac{2}{v_0} = 3 - \frac{2}{6} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque. Déterminons la relation de récurrence de la suite (w_n) .

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{v_{n+1} - 1}{v_{n+1} - 2} & w_{n+1} &= \frac{2v_n - 2}{v_n} \\ &= \frac{3 - \frac{2}{v_n} - 1}{3 - \frac{2}{v_n} - 2} & &= \frac{v_n}{v_n - 2} \\ &= \frac{2 - \frac{2}{v_n}}{1 - \frac{2}{v_n}} & &= \frac{2v_n - 2}{v_n - 2} \\ & & &= \frac{2(v_n - 1)}{v_n - 2} \\ & & &= 2w_n \end{aligned}$$

Au vu de sa relation de récurrence, (w_n) est géométrique de raison 2.

Son premier terme est : $w_0 = \frac{v_0 - 1}{v_0 - 2} = \frac{6 - 1}{6 - 2} = \frac{5}{4} = 1,25$.

- b.** Puisque (w_n) est géométrique, de premier terme $w_0 = 1,25$ et de raison $q = 2$, par propriété, on en déduit que, pour tout entier n naturel, on a : $w_n = 1,25 \times 2^n$.

On admet la relation $w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}$.

Avec un premier terme strictement positif et une raison strictement supérieure à 1, la suite (w_n) est strictement croissante, et donc elle est minorée par son premier terme : 1,25. Le nombre $w_n - 1$ sera donc toujours non nul.

Donc en inversant la relation admise, on a : $v_n - 2 = \frac{1}{w_n - 1} = \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$.

Ce qui implique : $v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$.

- c.** Comme $w_0 = 1,25 > 0$ et $q = 2 > 1$, par propriété : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,25 \times 2^n = +\infty$.

Par limite de la somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,25 \times 2^n - 1 = +\infty$.

Puis, par limite de l'inverse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} = 0$.

Finalement, par limite de la somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

3. Résolvons : $v_n < 2,01$:

$$\begin{aligned}
v_n < 2,01 &\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 2,01 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 0,01 \\
&\Leftrightarrow 1 < 0,01(1,25 \times 2^n - 1) \quad \text{car, pour tout } n \text{ naturel, on a : } 1,25 \times 2^n - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow 1 < 0,0125 \times 2^n - 0,01 \\
&\Leftrightarrow 1,01 < 0,0125 \times 2^n \\
&\Leftrightarrow \frac{1,01}{0,0125} < 2^n \quad \text{car } 0,0125 > 0 \\
&\Leftrightarrow 80,8 < 2^n \\
&\Leftrightarrow \ln(80,8) < n \ln(2) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\
&\Leftrightarrow \frac{\ln(80,8)}{\ln(2)} < n \quad \text{car } \ln(2) > 0 \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(80,8)}{\ln(2)} \\
\frac{\ln(80,8)}{\ln(2)} &\approx 6,34. \quad \text{Le plus petit entier } n \text{ vérifiant } v_n < 2,01 \text{ est donc } n = 7.
\end{aligned}$$

Partie C

Comme on a démontré dans la **partie A** que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, on explore les premiers termes de la suite à la calculatrice. On constate que $u_{16} \approx 2,012 \geq 2,01$, alors que $u_{17} \approx 2,009 < 2,01$.

On a donc, pour tout entier n supérieur ou égal à 17 : $1,99 < 2 < u_n \leq u_{17} < 2,01$

et donc, en particulier : $n \geq 17 \Rightarrow u_n \in]1,99 ; 2,01[$.

D'après la **partie B**, on a pour tout n entier naturel :

$$1,25 \times 2^n \geq 1,25, \quad \text{donc } 1,25 \times 2^n - 1 \geq 0,25 > 0, \quad \text{on en déduit : } \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} > 0.$$

$$\text{Finalement, on a : } v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} > 2.$$

D'après la dernière question de la **partie B**, on a : $n \geq 7 \Rightarrow v_n < 2,01$.

Ainsi, on a : $n \geq 7 \Rightarrow 1,99 < 2 < v_n < 2,01$.

Donc les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle à partir de l'indice 7.

Pour que les deux conditions soient réunies, il faut donc que l'indice soit simultanément supérieur à 7 et à 17, donc, en conclusion, c'est à partir de l'indice $N = 17$ que les termes v_n et u_n sont dans l'intervalle $]1,99 ; 2,01[$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 14

Métropole 10 septembre 2025 - sujet 2

Partie A

1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès d'une répétition de 10 épreuves de Bernoulli. Les épreuves sont indépendantes deux à deux. La probabilité du succès est $p = 0,4$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $10; 0,4$: $X \sim \mathcal{B}(10; 0,4)$.

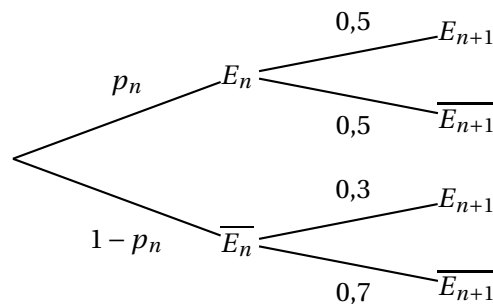
2. a. $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times p^2 \times (1 - p)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^8 \approx 0,1209$
 b. Comme les évènements $\{X = i\}$ et $\{X = j\}$ sont disjoints pour $i \neq j$:
- $$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\}) \\ &= \sum_{i=0}^2 P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} p^i (1 - p)^{10-i} \\ &\approx 0,1673 \end{aligned}$$

La probabilité que le phénomène El Niño soit dominant au plus deux années sur une période de 10 ans est d'environ 0,1673.

3. Comme X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,4)$: $E(X) = n \times p = 10 \times 0,4 = 4$. En moyenne le phénomène El Niño est dominant quatre années sur une période de 10 ans.

Partie B

1.



2. $p_0 = 0$
 $1 - p_0 = 1$
 $p_1 = P(E_1) = P(E_0) \times P_{E_0}(E_1) + P(\overline{E_0}) \times P_{\overline{E_0}}(E_1) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 = 0,3$
3. $p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$
 $= p_n \times 0,5 + (1 - p_n) \times 0,3 = 0,2 \times p_n + 0,3$
4. a. En utilisant la calculatrice la suite (p_n) semble être croissante et avoir pour limite 0,375.

| n | p_n |
|----------|----------------------|
| 0 | 0 |
| 1 | 0,3 |
| 2 | 0,36 |
| 3 | 0,372 |
| \vdots | \vdots |
| 13 | 0,374 999 999 692 8 |
| 14 | 0,374 999 999 938 56 |

- b. On formule l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(n)$: $p_n \leq 0,375$.

On vérifie que $\mathcal{H}(0)$ est vraie (initialisation).

Comme $p_0 = 0 \leq 0,375$, $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Montrons que $\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n + 1)$ (hérédité).

On suppose que $\mathcal{H}(n)$ est vraie, avec $n \in \mathbb{N}$.

$$p_{n+1} = 0,2 \times p_n + 0,3$$

D'après $\mathcal{H}(n)$, $p_n \leq 0,375$, en multipliant par 0,2 on obtient :

$0,2 \times p_n \leq 0,075$, en ajoutant $0,3$ on obtient :

$0,2 \times p_n + 0,3 \leq 0,375$, ainsi on obtient :

$p_{n+1} \leq 0,375$ ($\mathcal{H}(n+1)$ est vérifiée)

D'après le principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0, p_n \leq 0,375$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n désignant une probabilité est un nombre positif.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$p_{n+1} - p_n = -0,8 \times p_n + 0,3$$

$$p_{n+1} - p_n \geq -0,8 \times 0,375 + 0,3$$

$$p_{n+1} - p_n \geq 0$$

Ceci étant valable quelque soit le choix de n , $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} - p_n \geq 0$, donc (p_n) est croissante.

d. (p_n) est croissante et majorée donc (p_n) est convergente vers l . De plus $l \leq 0,375$.

5. a.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{8} \\ &= 0,2 \times p_n + 0,3 - \frac{3}{8} \\ &= 0,2 \times p_n + 0,2 \times \frac{3}{2} - 0,2 \times \frac{15}{8} \\ &= 0,2 \times p_n + 0,2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{8} \right) \\ &= 0,2 \times p_n + 0,2 \times \left(-\frac{3}{8} \right) \\ &= 0,2 \times \left(p_n - \frac{3}{8} \right) \end{aligned}$$

Finalement quel que soit n naturel, $u_{n+1} = 0,2 \times u_n$: ceci prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison $0,2$.

$$u_0 = p_0 - \frac{3}{8} = 0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$$

Le premier terme est donné par : $u_0 = -\frac{3}{8}$

b. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison $0,2$ de premier terme $u_0 = -\frac{3}{8}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = -\frac{3}{8} \times 0,2^n$$

$$\text{Comme } \forall n \in \mathbb{N} : u_n = p_n - \frac{3}{8},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : p_n = -u_n + \frac{3}{8} = (-0,2^n + 1) \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} (1 - 0,2^n)$$

c. Comme $0,2 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{8}$

d. La probabilité d'observer un phénomène El Niño dominant tend vers $\frac{3}{8}$ quand le nombre d'années d'observation augmente.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 15

Amérique du Sud 13 novembre 2025 - sujet 1

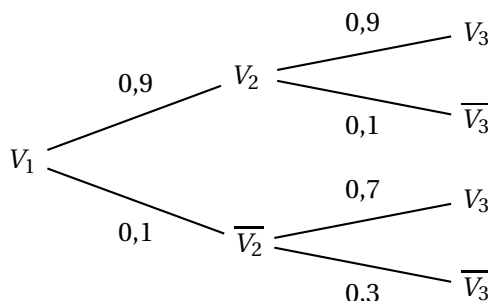
Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,7.

Pour tout entier naturel n , on note V_n , l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n -ième jour » et p_n la probabilité de V_n .

Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9. Or $p_1 = 1$ donc $p_2 = 0,9$.
 - $p_3 = P(V_3)$. On représente la situation par un arbre pondéré.



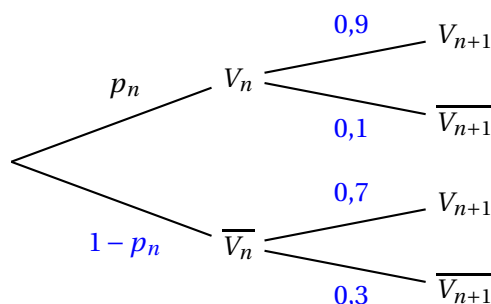
$\{V_2, \overline{V}_2\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_3 &= P(V_3) = P(V_2 \cap V_3) + P(\overline{V}_2 \cap V_3) = P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) + P(\overline{V}_2) \times P_{\overline{V}_2}(V_3) \\ &= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,7 = 0,88 \end{aligned}$$

- Sachant que le 3^e jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent est :

$$P_{V_3}(\overline{V}_2) = \frac{P(\overline{V}_2 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{0,1 \times 0,7}{0,88} = \frac{7}{88} \approx 0,08 \text{ au centième près.}$$

2. On complète l'arbre pondéré ci-dessous :



3. $\{V_n, \overline{V}_n\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(V_{n+1}) = P(V_n \cap V_{n+1}) + P(\overline{V}_n \cap V_{n+1}) = P(V_n) \times P_{V_n}(V_{n+1}) + P(\overline{V}_n) \times P_{\overline{V}_n}(V_{n+1})$$

$$= p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,7 = 0,9p_n + 0,7 - 0,7p_n = 0,2p_n + 0,7$$

4. On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geq 1$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

```

Programme 1
1 def repas(n):
2     p=1
3     L=[p]
4     for k in range(1,n):
5         p = 0.2*p+0.7
6         L.append(p)
7     return(L)

```

```

Programme 2
1 def repas(n):
2     p=1
3     L=[p]
4     for k in range(1,n+1):
5         p = 0.2*p+0.7
6         L.append(p)
7     return(L)

```

```

Programme 3
1 def repas(n):
2     p=1
3     L=[p]
4     for k in range(1,n):
5         p=0.2*p+0.7
6         L.append(p+1)
7     return(L)

```

a. Le programme qui permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) est le n° 1.

En effet, le n° 2 donne $n + 1$ termes, et le n° 3 donne des valeurs supérieures à 1.

b. Avec le programme n° 1, le résultat affiché pour $n = 5$ sera la liste $[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5]$.

$$p_1 = 1; p_2 = 0,9; p_3 = 0,88; p_4 = 0,2p_3 + 0,7 = 0,2 \times 0,88 + 0,7 = 0,876 \text{ et}$$

$$p_5 = 0,2p_4 + 0,7 = 0,2 \times 0,876 + 0,7 = 0,8752$$

Le résultat affiché par `repas(5)` sera donc $[1; 0,9; 0,88; 0,876; 0,8752]$.

5. On va démontrer par récurrence que $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$, pour tout naturel $n \geq 1$.

• **Initialisation**

$$\text{Pour } n = 1, \text{ on a : } 0,125 \times 0,2^{1-1} + 0,875 = 0,125 + 0,875 = 1.$$

Or $p_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang n c'est-à-dire que $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,7 = 0,2(0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875) + 0,7$$

$$= 0,125 \times 0,2^n + 0,2 \times 0,875 + 0,7 = 0,125 \times 0,2^n + 0,175 + 0,7$$

$$= 0,125 \times 0,2^n + 0,875$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 1$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

- On a donc démontré par récurrence que $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$ pour tout $n \geq 1$.
6. $-1 < 0,2 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875 = 0,875$
 La limite de la suite (p_n) est donc $0,875$.

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 16

Amérique du Sud 14 novembre 2025 - sujet 2

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 &= \ln(4) \\ v_{n+1} &= \ln(-1 + 2e^{v_n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad w_n = (-1 + e^{v_n}).$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1. • $v_1 = \ln(-1 + 2e^{v_0}) = \ln(-1 + 2e^{\ln 4}) = \ln(-1 + 2 \times 4) = \ln(-1 + 8) = \ln 7$ (valeur approchée ligne 4 colonne 3)
- $w_0 = -1 + e^{v_0} = -1 + e^{\ln 4} = -1 + 4 = 3$ (valeur ligne 3 colonne 4)

2. a. Il faut saisir la formule 2.

b. On peut penser que la suite (v_n) est croissante

c. Démonstration par récurrence :

Initialisation : on a $v_0 = \ln 4$ et $v_1 = \ln 7$: la croissance de la fonction \ln assure que $v_0 < v_1$.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n < v_{n+1}$, alors :

$e^{v_n} < e^{v_{n+1}}$ par croissance de la fonction exponentielle

$2e^{v_n} < 2e^{v_{n+1}}$ la multiplication par $+2$ respecte l'ordre

$-1 + 2e^{v_n} < -1 + 2e^{v_{n+1}}$ l'addition respecte l'ordre

$\ln(-1 + 2e^{v_n}) < \ln(-1 + 2e^{v_{n+1}})$ par croissance de la fonction logarithme népérien (on a supposé que la suite (v_n) est bien définie donc que tous les nombres de la forme $-1 + 2e^{v_n}$ sont supérieurs à zéro); soit finalement

$v_{n+1} < v_{n+2}$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N}, \quad v_n < v_{n+1}$$

La suite (v_n) est croissante.

3. a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -1 + e^{v_n}$, donc

$$w_{n+1} = -1 + e^{v_{n+1}} = -1 + e^{\ln(-1 + 2e^{v_n})} = -1 + (-1 + 2e^{v_n}) = -2 + 2e^{v_n} = 2(-1 + e^{v_n}) :$$

finalement

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n$: cette égalité montre que la suite w_n est géométrique de raison 2 avec pour premier terme $w_0 = 3$.

b. On sait qu'alors le terme général w_n est égal à :

$$w_n = 3 \times 2^n$$

Or par définition $w_n = -1 + e^{v_n} = 3 \times 2^n \iff e^{v_n} = 1 + 3 \times 2^n$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien : $v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$ pour tout entier naturel.

- c. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 2^n = +\infty$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 3 \times 2^n = +\infty$ et enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + 3 \times 2^n) = +\infty$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

4. L'algorithme permet de calculer les termes de la suite v_n à partir de v_0 . On vient de démontrer que la suite (v_n) n'est pas majorée. Donc quel que soit le choix du nombre S , il existe un rang p , tel que $v_p > S$ et l'algorithme donnera ce rang p .

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 17

Nouvelle-Calédonie 20 novembre 2025 - sujet 1

On considère n un entier naturel non nul.

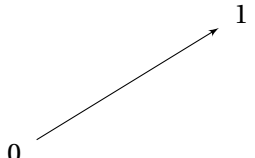
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_n(x) = x^n e^{1-x}$.

Partie A

1. $f_1(x) = x e^{1-x}$ donc $f_1'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-e^{1-x}) = \boxed{(1-x)e^{1-x}}$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{1-x} > 0$, donc $f_1'(x)$ est du signe de $1-x$. Or, $1-x \geq 0 \iff x \leq 1$. Donc, pour tout $x \in [0 ; 1[$, $f_1'(x)$ est strictement positif.

2.

| | | |
|---------------------|---|---|
| x | 0 | 1 |
| Signe de $f_1'(x)$ | + | |
| Variations de f_1 |  | |

$$f_1(0) = 0 \times e^{1-0} = 0$$

$$f_1(1) = 1 \times e^{1-1} = e^0 = 1$$

3. La fonction f_1 est continue (puisque dérivable) et strictement croissante sur $[0 ; 1]$, avec

$f_1(0) = 0 < 0,1$ et $f_1(1) = 1 > 0,1$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une solution unique dans $[0 ; 1]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. a. Pour $x \in [0 ; 1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$.
 $x \geq 0$ donc $x^n \geq 0$; on multiplie l'inégalité précédente par x^n :
 $0 \times x^n \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n \iff 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$
 On a donc démontré que pour tout entier naturel n , on a :

$$\boxed{0 \leq x^{n+1} \leq x^n}$$

- b. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$, donc, d'après la question précédente :

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n \iff 0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x}.$$

Donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$0 \leq x^{n+1} e^{1-x} \leq x^n e^{1-x} \implies 0 \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \iff \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq u_n}$$

- c. D'après la question précédente, puisque $u_{n+1} \leq u_n$ la suite (u_n) est décroissante.

De plus, puisque $0 \leq u_n$, elle est minorée par 0.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite positive ou nulle.

2. a. On sait que pour u et v dérivables on a : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

Posons $u'(x) = e^{1-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$. Alors $u(x) = -e^{1-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx &= [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{1-x}) dx \\ &= -1^{n+1} e^{1-1} - (-0^{n+1} e^{1-0}) - (n+1) \int_0^1 -x^n e^{1-x} dx \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_{n+1} = (n+1)u_n - 1}$$

- b. On complète le script Python en bleu ci-dessus pour que la fonction suite () renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 e^{1-x} dx$.

```
from math import exp

def suite() :
    u = exp(1)-2
    for n in range (1,8):
        u = (n+1) * u - 1
    return u
```

3. a. On se place dans l'intervalle d'intégration : soit $x \in [0; 1]$, donc
 $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \leq 1 \Rightarrow e^{1-x} \leq e$ (croissance de la fonction exponentielle)
 $\Rightarrow x^n e^{1-x} \leq x^n \times e$ ($x^n \geq 0$)
 $\Rightarrow \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n \times e dx$ (croissance de l'intégration)
 $\Rightarrow \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq e \int_0^1 x^n dx \Rightarrow u_n \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$
 $\Rightarrow u_n \leq \frac{e}{n+1}$
- b. On sait que pour tout n , on a : $0 \leq u_n$; donc $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

ÉLÉMENTS DE LA CORRECTION DE L'EXERCICE 18

Nouvelle-Calédonie 21 novembre 2025 - sujet 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right).$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$, et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 2}}$$

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{\frac{x}{2}} > 0$, on en déduit que $\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} > 0$ et $e^{\frac{x}{2}} + 2 > 0$.

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc $f'(x)$ est supérieur à zéro sur \mathbb{R} , donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. On sait que si $u > 0$, alors $\ln(e u) = u$, donc en particulier

$$f(2\ln(2)) = \ln\left(e^{\frac{2\ln(2)}{2}} + 2\right) = \ln(e \ln(2) + 2) = \ln(2 + 2) = \ln(4) = \ln(2^2) = \boxed{2\ln(2)}.$$

3. $u_1 = f(u_0) = \ln\left(e^{\frac{\ln(9)}{2}} + 2\right) = \ln\left(e \ln\left(9^{\frac{1}{2}}\right) + 2\right) = \ln(e \ln(3) + 2) = \ln(3 + 2) = \boxed{\ln(5)}$

4. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

• **Initialisation**

La fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc $\ln(4) \leq \ln(5) \leq \ln(9)$ c'est-à-dire $2\ln(2) \leq u_1 \leq u_0$. La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$.

• **Hérédité**

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

On sait que la fonction f est strictement croissante donc :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n \iff f(2\ln(2)) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \iff 2\ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Le propriété est donc bien héréditaire.

• **Conclusion**

La propriété est vérifiée pour $n = 0$, et elle est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc d'après le principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$.

5. D'après la question précédente on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 2\ln(2)$, donc la suite (u_n) est minorée.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite supérieure ou égale à $2\ln(2)$.

6. a. On résout dans \mathbb{R} l'équation $X^2 - X - 2 = 0$
Calcul du discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = \boxed{9}.$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines distinctes dans \mathbb{R} :

$$X_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1-3}{2} = -1 \quad ; \quad X_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

$$\mathcal{S} = \{-1; 2\}$$

- b. $e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff e^{\frac{2x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff (e^{\frac{x}{2}})^2 - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$
Posons $X = e^{\frac{x}{2}}$. On a alors :

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \iff X^2 - X - 2 = 0$$

D'après la question précédente, les solutions de l'équation $X^2 - X - 2 = 0$ sont $X_1 = -1$ et $X_2 = 2$. On a donc :

- $e^{\frac{x_1}{2}} = -1$ (impossible car $e^{\frac{x}{2}} > 0$)
- $e^{\frac{x_2}{2}} = 2 \iff \frac{x_2}{2} = \ln(2) \iff x_2 = 2\ln(2)$

$$\mathcal{S} = \{2\ln(2)\}$$

- c. On a vu à la question 5. que la suite (u_n) converge. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Comme f est une fonction continue, d'après le théorème du point fixe, on a ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.

On considère donc l'équation $f(x) = x$:

$$f(x) = x \iff \ln\left(e \frac{x}{2} + 2\right) = x \iff e \frac{x}{2} + 2 = e^x \iff e^x - e \frac{x}{2} - 2 = 0.$$

D'après la question précédente la solution de cette équation est $x = 2 \ln(2)$, donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \ln(2)}.$$