Rallye mathématique du Centre et du Congo

Éléments de correction de l'épreuve officielle 2023

Exercice n°1 Cookies en stock

6 points

Soit N le nombre de cookies réalisés.
« quand j'en fais des paquets de deux, il en reste un tout seul » donc N+1 est un multiple de 2.
« regroupés par trois, il en reste deux ; » donc N+1 est un multiple de 3.
« regroupés par quatre, il en reste trois » donc N+1 est un multiple de 4.
« et regroupés par cinq, il en reste 4 » donc N+1 est un multiple de 5.
N+1 est un multiple de 4, 5 et 3 inférieur à 201.
Ainsi N +1 est égale à 60 ou N+1= 120 ou bien N+1 =180, d'où N =59 ou N=119 ou bien N=179.

Exercice n°2 Les briques de jus

8 points

1. $V = 7,9^2 \times 25$
   $V = 1560,25 \text{ cm}^3$
   Les contenants actuels peuvent bien recevoir 1,5 L de liquide.

   Le volume inoccupé dans chaque contenant est de : $V_i = 1560,25 - 1500 = 60,25 \text{ cm}^3$
   le pourcentage de volume inoccupé est : $p_i = \dfrac{60,25}{1560,25} \approx 3,8\%$

2. $1,25L + 4cL = 1,29L$ soit $1290cm^3$
   Soit x la mesure du côté de la base de la brique et h sa hauteur.
   On cherche donc x et h afin de minimiser le volume, tout en ayant $x^2h \geq 1290$.
   La hauteur maximale de la brique est de 24 cm.

   Si $h = 24$ cm on doit avoir $x \geq \sqrt{\dfrac{1290}{24}}$, la plus petite valeur de x convenant est x =7,4 cm soit un volume $V = 1314,24cm^3$.

   Si $\underline{h = 23\text{cm}}$ on doit avoir $x \geq \sqrt{\dfrac{1290}{23}}$, la plus petite valeur de x convenant est x =7,5 cm soit un volume $\underline{V = 1293,75cm^3.}$

   Si $h = 22$cm on doit avoir $x \geq \sqrt{\dfrac{1290}{22}}$, la plus petite valeur de x convenant est x =7,7 cm soit un volume $V = 1304,38cm^3$.

   Si $h = 21$cm on doit avoir $x \geq \sqrt{\dfrac{1290}{21}}$, la plus petite valeur de x convenant est x =7,9 cm soit un volume $V = 1310,61cm^3$.

   Les dimensions que doit avoir la nouvelle brique sont $x = 7,5$ cm et $h = 23$ cm.

Exercice n°3 — Un impair, deux pairs, trois impairs,...

10 points

1.

	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5	Colonne 6
Ligne 1	1					
Ligne 2	2	4				
Ligne 3	5	7	9			
Ligne 4	10	12	14	16		
Ligne 5	17	19	21	23	25	
Ligne 6	26	28	30	32	34	36

   36 est à la fin de la ligne 6 : L6C6 et 30 est dans la case L6C3.

2. A la fin de la n^e ligne le $(\dfrac{n \times (n+1)}{2})^e$ nombre est n^2.
   Le nombre $100{=}10^2$ est dans la ligne 10 et la colonne 10 : soit la case L10C10.

3. $\dfrac{13 \times 14}{2} = 91$ et $\dfrac{14 \times 15}{2} = 105$
   Le 91^e nombre qui est 13^2 =169 est à la fin de la ligne 13.
   Le 105^e nombre qui est 14^2 =196 est à la fin de la ligne 14.
   Le 100^e nombre qui est $196 - 2 \times 5 = 186$ est donc dans la ligne 14 et colonne 9 : L14C9.

4. $44^2 \leq 2023 \leq 45^2$
   Le nombre $2025{=}45^2$ est dans la ligne 45 et la colonne 45 : soit la case L45C45.
   Le nombre 2023 est dans la ligne 45 et la colonne 44 : soit la case L45C44.

5. $\dfrac{63 \times 64}{2} = 2016$ et $\dfrac{64 \times 65}{2} = 2080$
   Le 2016^e nombre qui est 63^2 =3969 est à la fin de la ligne 63.
   Le 2080^e nombre qui est 64^2 =4096 est à la fin de la ligne 64.
   Le 2023^e nombre qui est $196 - 2 \times 57 = 3982$ est donc dans la ligne 64 et colonne 7 : L64C7.

Exercice n°4 — Déchiffrer pour notre ami

10 points

1. 868081819444580264445802488384444284464482286 44
2. MERCI POUR TOUT REMY
3.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	O		T		I	X	S	P	W	V
3	A	U	Y	K	Q	Z	B	C	D	M
1	E	F	G	R	L	N	H	J		

Exercice n°5 **Des brillants carreaux maths**

12 points

•Carreau n°1 :

Les angles $\widehat{DIC}$ et $\widehat{EIB}$ sont opposés par le sommet donc ils sont égaux.
Les angles $\widehat{CDI}$ et $\widehat{EBI}$ sont égaux à 45°.
Donc les triangles DCI et EIB ont 2 angles 2 à 2 égaux donc ils sont semblables.
$[DC]$ et $[EB]$ sont des côtés homologues et comme $EB = \frac{1}{2} \times DC$, le triangle DCI est un agrandissement à l'échelle 2 du triangle EIB.
Donc dans le triangle DCI, la hauteur issue de I est égale au double de la hauteur issue de I dans le triangle EIB.
Donc la hauteur issue de I dans le triangle EIB est égale à $\frac{10}{3}$ cm et la hauteur issue de I dans le triangle DCI est égale à $\frac{2\times 10}{3}$cm.
Donc l'aire des deux triangles est égale à $(10 \times \frac{2\times 10}{2}) : 2 + (5 \times \frac{10}{3}) : 2$
Donc l'aire blanche est égale à :
$10 \times 10 - ((10 \times \frac{2\times 10}{3}) : 2 + (5 \times \frac{10}{3}) : 2) \approx 58,3 \text{ cm}^2$.

•Carreau n°2 :
On considère les triangles GCJ et JHF. Comme pour le carreau n°1, on montre facilement que le triangle HJF est un agrandissement à l'échelle 2 du triangle GCJ et donc de même on a :
Aire HJF + Aire $GCJ = (10 \times \frac{2\times 5}{3}) : 2 + (5 \times \frac{5}{3}) : 2$
Pour des raison de symétrie, Aire coloriée $= 2 \times$ (Aire HJF + Aire GCJ) $= 10 \times \frac{2\times 5}{3} + 5 \times \frac{5}{3}$
Donc Aire blanche $= 10 \times 10 - (10 \times \frac{2\times 5}{3} + 5 \times \frac{5}{3}) \approx 58,3 \text{ cm}^2$

•Carreau n°3 :
Pour des raisons évidentes de symétrie, l'aire blanche est égale à la moitié de l'aire du carré donc l'aire blanche est égale à $100 : 2 \text{ cm}^2$ c'est-à-dire 50 cm^2.

•Carreau n°4 :
Aire blanche = Aire DFC + Aire CBE + aire $AFE = \frac{10\times 5}{2} + \frac{10\times 5}{2} + \frac{5\times 5}{2} = 62{,}5 \text{ cm}^2$

•Carreau n°5 :
D'abord intéressons nous à la nature des 4 triangles DLH, GKC, FJB et AIE et du quadrilatère $LKJI$.
Dans le triangle DAE rectangle E, on obtient $\widehat{HDL} + \widehat{AEI} = 90°$
Or par construction les triangles DLH et AIE sont « identiques » (isométriques) donc $\widehat{AEI} = \widehat{DHL}$.
Par conséquent $\widehat{DLH} = 180° - (\widehat{HDL} + \widehat{DHL}) = 180° - 90° = 90°$
Donc les 4 triangles DLH, GKC, FJB et AIE sont rectangles en respectivement L, K, J et I.
Et le quadrilatère $LKJI$ est un carré (4 angles droits et 4 côtés de la même longueur pour des raisons de symétrie).

Maintenant, essayons de trouver le rapport entre les longueurs HL, LK et KC.
(DE) et (GB) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à (HC), donc d'après le théorème de Thalès :
$\frac{CK}{CL} = \frac{CG}{CD} = \frac{1}{2}$ donc $CK = KL$.
(HL) et (AI) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à (DE), donc d'après le théorème de Thalès :
$\frac{HL}{AI} = \frac{DH}{DA} = \frac{1}{2}$ donc $HL = \frac{1}{2} \times AI$.
Pour des raisons de symétrie, $CK = AI$ donc $HL = \frac{1}{2}\ CK = \frac{1}{2}\ KL$
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HDC rectangle en D, on a : $HC = \sqrt{125} \approx 11,18$ cm.
Donc $HL = \frac{1}{5} \times 11,18 \approx 2,24$ cm et $LK = KC \approx \frac{2}{5} \times 11,18 \approx 4,47$ cm.
Donc Aire du carré central$\approx 4,47^2 \approx 19,98 \text{ cm}^2$
Aire des 4 triangles rectangles $\approx 4 \times 4,47 \times 2,24 : 2 \approx 20,03 \text{ cm}^2$.
Donc Aire blanche $\approx 10 \times 10 - 19,98 - 20,03 = 59,99 \text{ cm}^2$.

Donc il faut choisir le carreau n°4.

Exercice n°6 **La bille, l'aimant et les deux roues**

8 points

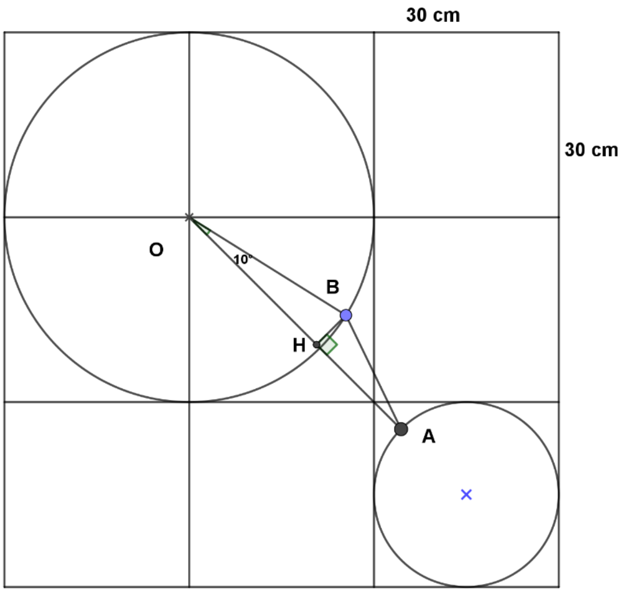
1. La distance AB est minimale quand A et B sont alignés avec les centres des 2 roues.

   La diagonale d'un carreau mesure $\sqrt{1800} \approx 42,43$ cm.
   Donc AB $= \sqrt{1800} + \dfrac{\sqrt{1800}}{2} - 30 - 15 \approx 18{,}64$ cm.
   Or $18{,}64 < 19$, donc oui la bille peut sauter sur l'aimant.
2. On considère la figure ci-dessous dans laquelle on a placé H le projeté orthogonal de B sur (OA). On veut calculer AB.

   Dans le triangle rectangle OHB : $\cos(10°) = \dfrac{OH}{30}$ donc $OH = 30 \times \cos(10°)$ cm
   De plus $OA = \sqrt{1800} + \dfrac{\sqrt{1800}}{2} - 15$ cm.
   Donc $HA = OA - OH = \sqrt{1800} + \dfrac{\sqrt{1800}}{2} - 15 - 30 \times \cos(10°) \approx 19{,}10$ cm.
   Dans le triangle rectangle OHB : $\sin(10°) = \dfrac{HB}{30}$ donc $HB = 30 \times \sin(10°) \approx 5{,}21$ cm.

   Donc en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HBA rectangle en H, on a :

   $BA \approx \sqrt{19,10^2 + 5,21^2} \approx 19{,}8$ cm. Or $19{,}8 > 19$, donc la bille ne saute pas.



Exercice n°7 Jeux de roues

6 points

Roue A : 2 - 4 - 9
Roue B : 1 - 6 - 8
Roue C : 3 - 5 - 7

Roue A \ Roue C	3	5	7
2	G	G	G
4	P	G	G
9	P	P	P

La roue C gagne avec une probabilité $\frac{5}{9}$ de contre la roue A.

Roue A \ Roue B	1	6	8
2	P	G	G
4	P	G	G
9	P	P	P

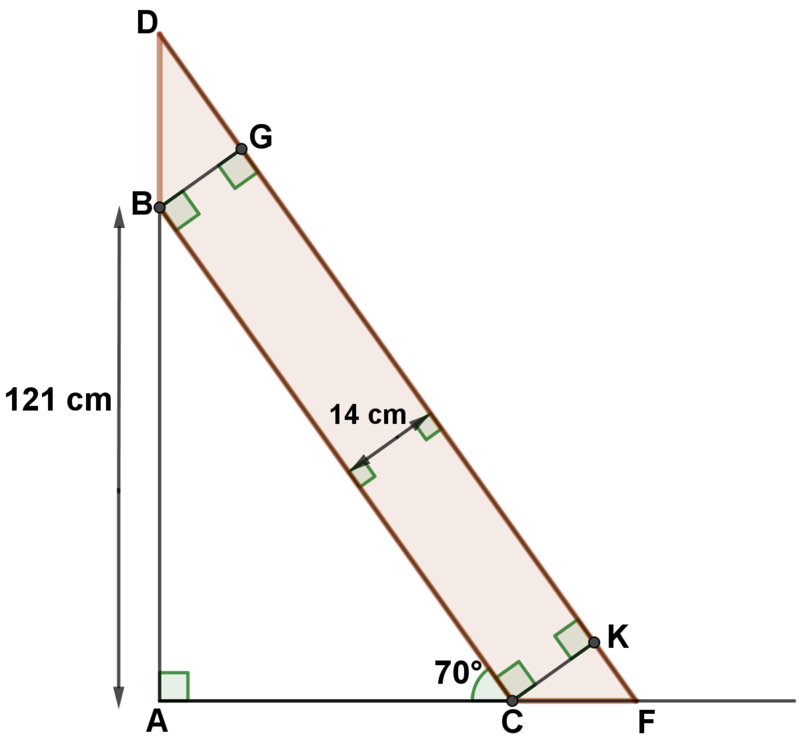
La roue B perd avec une probabilité $\frac{5}{9}$ de contre la roue A.

Roue B \ Roue C	3	5	7
1	G	G	G
6	P	P	G
8	P	P	P

La roue C perd avec une probabilité $\frac{5}{9}$ de contre la roue B.

Exercice n°8 L'échelle n'est pas à l'échelle

8 points



• Dans le triangle ABC rectangle en A :

$\sin 70° = \frac{121}{BC}$ donc $BC = \frac{121}{\sin 70°}$ ≈128,8 cm.

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CFK}$ sont correspondants et formés par des droites parallèles donc ils sont égaux.

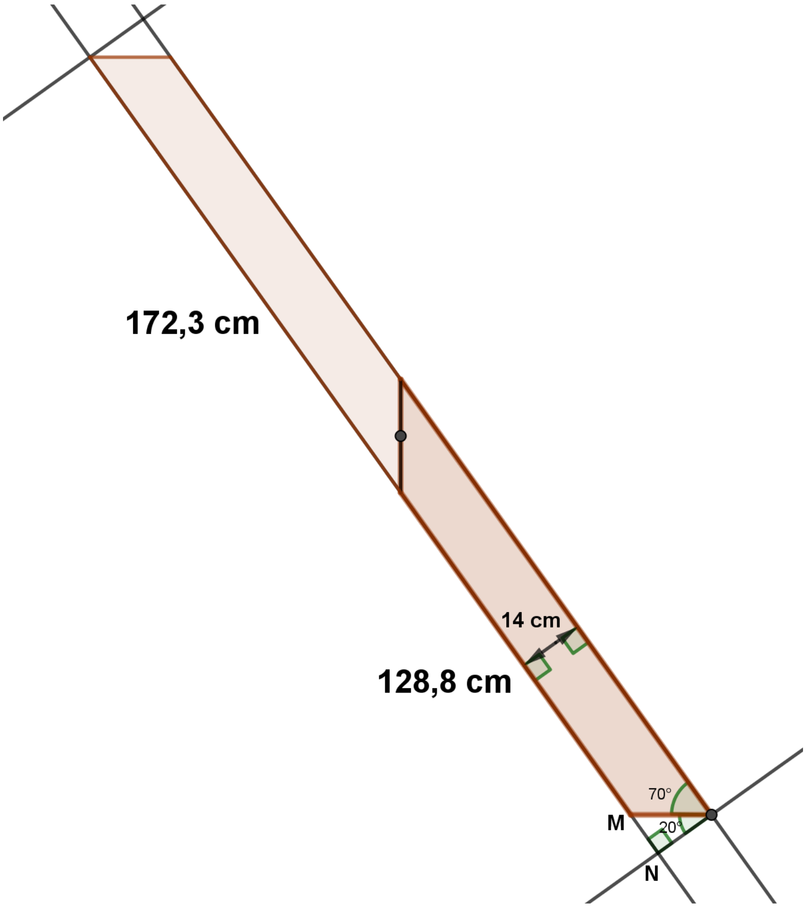
Dans le triangle CFK rectangle en K : $\tan 70° = \frac{14}{KF}$ donc $KF = \frac{14}{\tan 70°}$.
$\widehat{ACB} = 90° - 70° = 20°$.

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BDG}$ sont correspondants et formés par des droites parallèles donc ils sont égaux.

Dans le triangle BDG rectangle en G : $\tan 20° = \frac{14}{DG}$ donc $DG = \frac{14}{\tan 20°}$.

Donc $DF = \frac{121}{\sin 70°} + \frac{14}{\tan 70°} + \frac{14}{tan 20°} \approx 172,3$ cm.

Longueur totale des 5 marches : $5 \times 38 = 190$ cm.



$MN = 14 \times \tan 20°$.

Donc longueur totale nécessaire :

$172,3 + 128,8 + 14 \times \tan 20° + 190 \approx 496,2$ cm.