

RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE - MATHABRAZZA

Correction de l'épreuve préparatoire décembre 2023

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.
Bon courage et rendez-vous pour l'épreuve officielle.

Exercice n°1

Attaque fréquentielle

7 points

La lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Effectif	10	4	13	2	0	9	1	6	6	0	22	1	11	0	6	1	0	4	5	5	4	0	1	1	11	10
Fréquence	7,5	3	9,8	1,5	0	6,8	0,7	4,5	4,5	0	16,5	0,7	8,3	0	4,5	0,7	0	3	3,8	3,8	3	0	0,7	0,7	8,3	7,5
Code la lettre	C	F	A	H	K	N	Q	R	U	W	E	G	I	B	D	Z	X	V	L	O	M	J	Y	P	S	T

Message décodé :

FELICITATIONS , EN DECODANT TRES ASTUCIEUSEMENT CE MESSAGE CODE VOUS AVEZ FRANCHI UN PAS DECISIF VERS LA VICTOIRE FINALE DANS CE RALLYE MATHÉMATIQUE DU CENTRE.

Exercice n°2

On ne peut pas tout faire !

12 points

Zigzag $L = 20\sqrt{10} + 3 + 30 \approx 96,25$ cm

Directe $L = 10\sqrt{10} + 10 \times 3 + \sqrt{109} + 30 \approx 102,06$ cm

Rapide $L = 10\sqrt{10} + 9 \times 3 + 2\sqrt{34} + 30 \approx 100,28$ cm

Collet Français $L = 2\sqrt{10} + 10 \times 3 + 9\sqrt{13} + 30 \approx 98,77$ cm

Semi-directe $L = 8\sqrt{10} + 10 \times 3 + \sqrt{13} + 2\sqrt{34} + 30 \approx 100,57$ cm

Créneau $L = 10 \times 3 + 10 + \sqrt{109} + 30 \approx 80,44$ cm

Maud peut utiliser le zigzag, le collet français et le créneau.

Exercice n°3**Nombres harshad****8 points**

- 11 est le plus petit nombre qui n'est pas harshad.
- Voici la liste de tous les nombres harshad inférieurs à 200 :
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100, 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, 132, 133, 135, 140, 144, 150, 152, 153, 156, 162, 171, 180, 190, 192, 195, 198, 200.
- 10^{32} est un nombre harshad s'écrivant avec 33 chiffres.
- $10^{23} + 2$ est un nombre harshad s'écrivant avec 24 chiffres et se terminant par 2.
- Non, il n'existe pas de nombre harshad premier strictement supérieur à 7.
En effet, si un tel nombre N existait, il serait :
- divisible par la somme de ses chiffres
- supérieur à 10 (car le plus petit nombre premier strictement supérieur à 7 est 11).
En observant que la somme des chiffres d'un entier supérieur à 10 est toujours strictement inférieure à cet entier, il vient :
 - si la somme des chiffres vaut 1 alors le nombre vaut 1 qui est inférieur à 7 ou il est une puissance de 10 et n'est donc pas premier.
 - sinon, la somme de ses chiffres est alors un diviseur de N compris entre 2 et $N-1$, ce qui est impossible car N est premier.
 c.q.f.d

Exercice n°4**La tour infernale de MathCraft****10 points**

- $1 + 3 + 5 + 7 = 16$. La hauteur de la tour de 4 structures cubiques est de 16 briques.
- On note que chaque structure en dessous d'une autre a deux briques de plus sur chaque côté.
On note p le nombre de structures cubiques de la plus haute tour.
On détermine le plus grand entier p tel que $1 + 3 + 5 + \dots + (2p + 1) \leq 191$.
Par additions successives on trouve $2p+1 = 25$.
La tour de Mattéo comprend au plus 13 structures cubiques.
Dans ce cas la tour mesure $1 + 3 + 5 + 7 \dots + 21 + 23 + 25 = 169$ briques de haut.
- Calcul du nombre de briques nécessaires pour construire la tour la plus haute :
 $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + 23^3 + 25^3 = 56\,953$.
Le temps passé par Mattéo sera égal à $\frac{56953}{13} \times 4 = 17\,524$ s. Donc un temps de 4 h 52 min 4s.
- On ne peut construire deux tours de la plus grande hauteur possible avec 83 000 briques seulement. Mais si l'on retire de celle-ci la structure de 25³ briques on pourra construire chaque tour avec $56\,953 - 25^3 = 41\,328$ briques ; donc 82 656 briques pour les deux. Il restera alors 344 briques non utilisées.
La hauteur de chacune des tours sera égale à $1 + 3 + 5 + 7 \dots + 21 + 23 = 144$ briques.

Exercice n°5**Meuble sous toit****5 points**

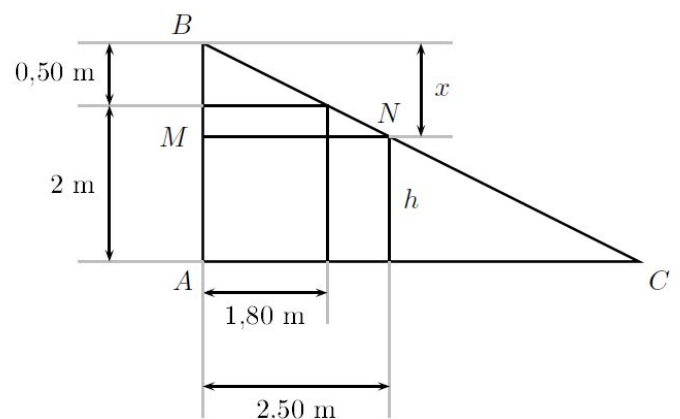
Posons $BM = x$ et $AM = h$ (voir figure).
Utilisons le théorème de Thalès dans le triangle BMN
(ou en utilisant $\tan(\widehat{ABC})$) pour écrire :

$$\frac{0,5}{x} = \frac{1,8}{2,5} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2,5 \times 0,5}{1,8} = \frac{25}{36}$$

$$h = 2,5 - \frac{25}{36} \approx 1,8055$$

Le locataire peut donc mettre à la même place le meuble de 1,80 m sur 2,50 m.

Remarque : c'est loin d'être la seule méthode!



Exercice n°6**L'aire intérieure****10 points**

On cherche tout d'abord l'aire du triangle ABC.

$AB = AC = BC = 6$ cm donc ABC est équilatéral.

Dans un triangle équilatéral, la hauteur issue d'un sommet passe par le milieu du côté opposé.

D'après le théorème de Pythagore, la hauteur h de ce triangle est donnée par :

$$h = \sqrt{6^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{27} \text{ (ou } 3\sqrt{3}\text{)}$$

Ainsi, l'aire du triangle est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{6 \times \sqrt{27}}{2} = 3\sqrt{27} \text{ (ou } 9\sqrt{3}\text{)}$$

Le triangle ABC est composé de :

- La surface noire qui nous intéresse
- 3 secteurs circulaires de même aire (secteurs de même rayon et de même angle 60° car le triangle ABC est équilatéral)

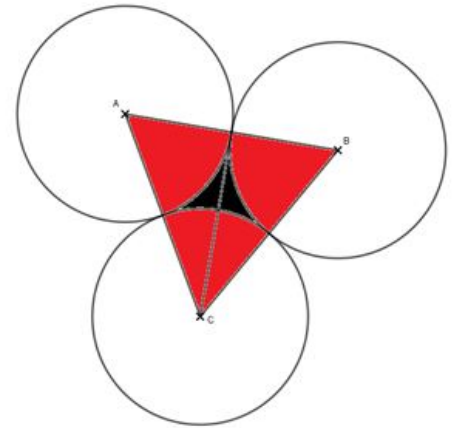
60° est le sixième de 360° .

Ainsi l'aire d'un secteur rouge est égale à un sixième de l'aire totale du disque.

$$\mathcal{A}_{\text{secteur rouge}} = \frac{1}{6} \times \pi \times 3^2 = \frac{3\pi}{2}$$

Donc l'aire de la partie noire est donc :

$$\mathcal{A}_{\text{partie noire}} = 3\sqrt{27} - 3 \times \frac{3\pi}{2} = 3\sqrt{27} - \frac{9\pi}{2} \text{ (ou } 9\sqrt{3} - \frac{9\pi}{2}\text{)}$$



Compétence « chercher »			
Niveau insuffisant	Niveau fragile	Niveau satisfaisant	Très bonne maîtrise
L'élève n'entre pas dans la tâche 0 pt	L'élève reproduit la figure correctement, mais sans rien en faire (ou rien de significatif) OU Sans aucune construction, l'élève élabore des stratégies pour estimer l'aire (découpages, ...) mais utilise des mesures « fictives » (erronées) 3 pts	L'élève reproduit la figure correctement et élabore des stratégies pour estimer l'aire (découpages, ...), même avec des erreurs de calculs ou des mesures prises sur le dessin OU Sans aucune construction, l'élève élabore des stratégies pour estimer l'aire (découpages, ...) en essayant, même avec erreurs, de déterminer les mesures nécessaires par le calcul. 5 pts	Avec construction, éléments du « satisfaisant » + l'élève mentionne, d'une façon ou d'une autre que le résultat établi est une approximation (par l'utilisation d'un \approx au début des calculs, par exemple). OU Sans construction, éléments du « satisfaisant » + l'élève détermine correctement quelques mesures nécessaires par le calcul et les utilise de façon pertinente 6 pts

Abouissement au résultat attendu :

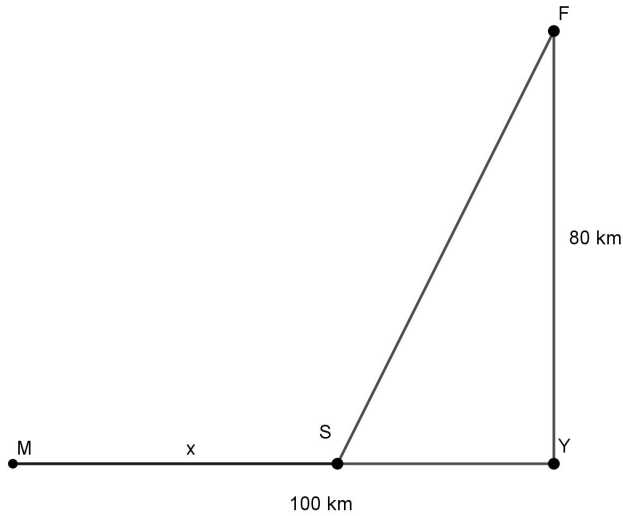
- en valeur approchée au dixième : +1
- en valeur exacte : +2

Compétence « communiquer »				
Indicateurs	Niveau insuffisant	Niveau fragile	Niveau satisfaisant	Très bonne maîtrise
<ul style="list-style-type: none"> • Les unités sont utilisées correctement • Au moins une condition d'un théorème ou d'une propriété est mentionnée (pour théorème de Pythagore, ou concernant la hauteur d'un triangle équilatéral, ou l'égalité des angles d'un triangle équilatéral, ...) • Les conditions des théorèmes et propriétés utilisées sont mentionnées au moins deux fois • La démarche est explicitée (construction, découpage, ...) → Compte pour deux indicateurs 	Moins de deux indicateurs observés 0 pt	Seulement 2 ou 3 indicateurs observés 1 pt	Seulement 4 indicateurs observés 1,5 pt	Les 5 indicateurs observés 2 pts

Exercice n°7**De Mercalme au fort Thune****8 points**

On pose :

M : port de Mercalme, F : le fort Thune, Y : la ville de Yakoto, S : la station à construire (voir la figure ci dessous).

On a $MY = 100$ km , $FY = 80$ km , et note $MS = x$ km.

Par le théorème de Pythagore on obtient :

$$SF^2 = 80^2 + (100 - x)^2 \text{ donc } SF = \sqrt{80^2 + (100 - x)^2}$$

Le transport par caravane dans le désert étant trois fois plus cher que par la ligne de chemin de fer, on minimise donc la grandeur $MS + 3 \times SF$.On se ramène à l'étude de la fonction f définie par $f : [0, 100] \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto x + 3\sqrt{80^2 + (100 - x)^2}.$$

À l'aide de la calculatrice ou du tableur, on trouve un minimum atteint pour $x = 72$ km à l'unité près.

65	326,963738
66	326,775766
67	326,617026
68	326,487911
69	326,388811
70	326,320112
71	326,282197
72	326,275441
73	326,300217
74	326,35689
75	326,445819
76	326,567356
77	326,721845
78	326,909622