Rallye mathématique du Centre

Mathabrazza

Elements de correction de l'épreuve préparatoire

Exercice n°1 — Si c'est déficient ou abondant, ce n'est pas parfait !

6 points

1. Les nombres abondants entre 1 et 100 sont : 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100.

   Les nombres parfaits entre 1 et 100 sont : 6, 28.

   Les nombres déficients entre 1 et 100 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99.
2. $2026 = 2 \times 1013$ et 1013 est un nombre premier. Or $1 + 2 + 1013 < 2026$ donc 2026 est un nombre déficient.
3. Non, tous les nombres abondants ne sont pas pairs. Par exemple 945 est impair et abondant, en effet :
   $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 15 + 21 + 27 + 35 + 45 + 63 + 105 + 135 + 189 + 315 = 975$ et $945 < 975$.
   Remarques :
   Le fait qu'une classe précise ne pas avoir trouvé de nombre abondant impair mais que cela n'implique pas l'impossibilité serait valorisée dans une épreuve officielle du Rallye.
   Et dans cette épreuve préparatoire, il peut être opportun de revenir sur les règles du débat mathématique dans une classe qui conclut que tous les nombres abondants sont pairs car elle n'a pas trouvé de contre-exemple.

Exercice n°2 — Merci les amis

5 points

En rassemblant les informations dans un tableau on obtient :

	Jean-Pierre	Philippe	Rémy	Pierrick	Jean-Marie	Total
Chapeau	oui					3
Lunettes			non	non		3
Echarpe		oui	non			2

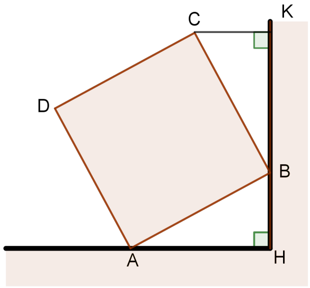
On complète avec les contraintes :

	Jean-Pierre	Philippe	Rémy	Pierrick	Jean-Marie	Total
Chapeau	oui	non	oui	oui	non	3
Lunettes	oui	oui	non	non	oui	3
Echarpe	non	oui	non	oui	non	2

Jean-Marie a des lunettes mais pas d'écharpe ni de chapeau.

Exercice n°3 Les cubes du musée

8 points



On note K le projeté de C sur (BH) et $\alpha = \widehat{BAH}$

Il vient alors $\widehat{HBA} = 90 - \alpha$. D'où $\widehat{KBC} = 90 - \widehat{HBA} = \alpha$ et $\widehat{BCK} = 90 - \alpha$

Les triangles ABH et BCK sont donc semblables.
Or $AB = BC = 5$ donc ABH et BCK sont des triangles égaux (isométriques).
On a ainsi $AH = BK$ et $BH = CK$.
La **hauteur** à laquelle culmine chaque cube est donc $HK = HB + BK$ soit **BH+AH**.

cube 1 :
Ici $AH = 4$, en utilisant le théorème de Pythagore on trouve $BH = 3$ m. La hauteur du *cube 1* est AH+BH = **7 m**.

cube 2 :
De la même façon, on trouve $AH = 4$ m. La hauteur du *cube 2* est AH+BH = **7 m**.

cube 3 :
$\widehat{BAH} = 40$ d'où $AH = 5 \times \cos 40$ et $BH = 5 \times \sin 40$.
Ainsi la hauteur du *cube 3* est BH+AH = $5(\cos 40 + \sin 40) \approx$ **7,04 m**.

cube le plus haut :
Il faut maximiser BH+AH = $5(\cos\alpha + \sin\alpha)$, ce qui est réalisé pour $\alpha = 45°$.
Ainsi la hauteur maximale est BH+AH = $5(\cos 45 + \sin 45) = 5 \times \sqrt{2} \approx$ **7,07 m**.

solution géométrique pour le maximum de hauteur : montrons que c'est AC.
On note J la projection orthogonale de C sur la droite (AH).
On a CJ = HK donc on cherche à maximiser CJ. Or dans le cas où J est distinct de A, le triangle AJC est rectangle en J et le théorème de Pythagore permet d'affirmer que CJ $<$ AC .
Ainsi AC est un majorant de tous les CJ. Ce majorant est atteint lorsque J est en A car alors CA = CJ : ceci correspond à la situation du cube lorsqu'il est appuyé en B et que l'angle $\widehat{BAH}$ vaut 45°. C'est donc le maximum.

Exercice n°4 Au bonheur, l'escape game !

6 points

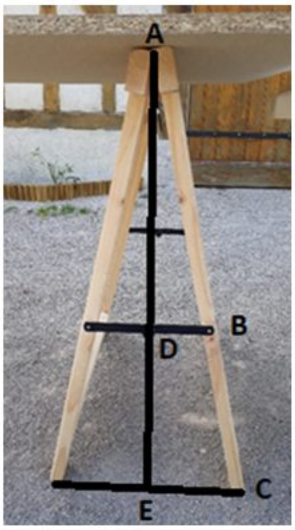
-L'heure de l'horloge de la pièce centrale est un entier parmi : 2,3,5,7 et 11.
- Les heures des trois autres pièces sont trois entiers consécutifs compris entre 1 et 12.
Soit :
-1,2,3 avec 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges à savoir (1,2,3) ;(1,3,2) ;(2,1,3) ;(2,3,1) ;(3,1,2) et (3,2,1)
-2,3,4 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-3,4,5 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-4,5,6 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-5,6,7 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-6,7,8 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-7,8,9 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-8,9,10 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-9,10,11 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges
-10,11,12 avec de la même façon 6 possibilités de répartitions des heures sur les 3 horloges

Ce qui donne $10 \times 6 = 60$ possibilités pour chacun des nombres 2,3,5,7 et 11.
Au total, il y a donc au maximum 300 combinaisons possibles à tester, à raison de 3 secondes par combinaison cela fait 900 secondes soit 15 minutes.
Tiphaine a donc raison, ils n'ont pas assez de temps pour être sûr de pouvoir sortir.

Exercice n°5 — (i) Les tréteaux pour mettre la table

9 points

1ère option :



On cherche à calculer DB sachant que AB = 41 cm.

Hauteur totale table en plastique : 65 cm + 5 cm = 70 cm

70 cm – 2 cm = 68 cm donc [AE] doit mesurer 68 cm.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEC rectangle en E :

$CE^2 = 76^2 - 68^2 = 1152$ donc CE ≈ 34 cm.

(DB) // (EC) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CE} \text{ donc } \frac{41}{76} = \frac{DB}{34} \text{ donc DB} \approx 18{,}3 \text{ cm.}$$

Donc la longueur de la barre métallique doit être d'environ 36,6 cm.

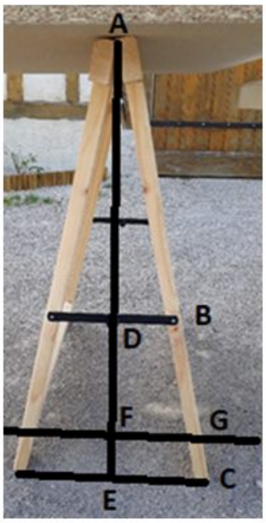
2ème option :

Cette fois on cherche à calculer AB sachant que DB = 10 cm.

Toujours d'après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CE}$ donc $\frac{AB}{76} = \frac{10}{34}$ donc AB ≈ 22,4 cm

Il faut fixer la barre à 22,4 cm du sommet A du tréteau.

3ème option :



On chercher à calculer AG sachant que AF = 68 cm.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB rectangle en D :

$DA^2 = 41^2 - 10^2 = 1581$ donc DA ≈ 39,8 cm

(DB) // (FG) donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AB}{AG} \text{ donc } \frac{39{,}8}{68} = \frac{41}{AG} \text{ donc AG} \approx 70 \text{ cm}$$

Donc il faut couper 6 cm à chaque pied des tréteaux.

Exercice n°6 — Ce n'est pas du cinéma !

5 points

A ce jour, les formules les plus courtes possibles sont :

$28 = (1 + 2 \times 3) \times 4$

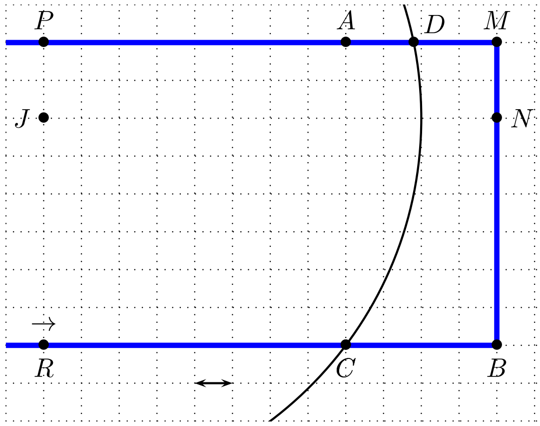
$468 = (1 \times 2 + 3^4 - 5) \times 6$

$2013 = 1 + 2 \times (3 + 4^5 - 6 - 7 - 8)$

$2025 = ((1 \times 2 + 3) \times (4 + 5))^{-6+7-8+9}$

Exercice n°7 | Balade irrationnelle pour une fleur de la Rome antique

8 points



1. Lundi matin, il trouve la fleur en A. Avec le théorème de Pythagore on trouve : $AJ = \sqrt{400^2 + 100^2} = 100\sqrt{17}$

2. Mardi matin, il trouve la fleur en B. $BJ = \sqrt{600^2 + 300^2} = 100\sqrt{45} = 300\sqrt{5}$.
Il lui reste donc à parcourir $300\sqrt{5}$ m pour arriver chez Juliette.

3. Il suffit de tracer un cercle de centre J et de rayon $R = 500$ pour trouver les points C et D.
Calcul de RC : $RC = \sqrt{500^2 - 300^2} = \sqrt{160\ 000} = 400$.
Calcul de DP : $DP = \sqrt{500^2 - 100^2} = \sqrt{240\ 000} = 200\sqrt{6}$.

4. On note F l'endroit où il trouve la fleur. On distingue les cas :
   - Si $F \in [RB]$, le maximum parcouru est $300\sqrt{5}$ mètres (voir question 2) et $300\sqrt{5} < 1550$ donc Roméo n'a pas trouvé la fleur sur ce segment.

   - Si $F \in [BN]$, en notant $h = BF$, la distance totale parcourue par Roméo est $d = 600+h+\sqrt{600^2 + (300-h)^2}$ avec $h \in [0\ ;\ 300]$.
   On peut contrôler à la calculatrice le maximum de d est 1500 m (lorsque F est en N).
   On peut aussi résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 300]$ l'équation

   $$1550 = 600+h+\sqrt{600^2 + (300-h)^2} \iff 950-h = \sqrt{600^2 + (300-h)^2} \iff (950-h)^2 = 600^2+(300-h)^2$$

   La résolution de cette équation (du premier degré finalement) donne $h = \dfrac{541600}{1300} \approx 416 \notin [0\ ;\ 300]$.

   - Si $F \in [NM]$, en notant $x = NF$, on est amené à résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 100]$ l'équation :

   $$1550 = 900+x+\sqrt{600^2 + x^2} \iff 650-x = \sqrt{600^2 + x^2} \iff (650-x)^2 = 600^2+x^2 \iff x = \frac{62500}{1300} \approx 48$$

   Roméo a donc parcouru environ 948 m (900+48) sur le chemin avant de trouver la fleur.

   - Pour vérifier : si $F \in [MP]$, on note $x = PF$. On est amené à résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 600]$ l'équation :

   $$1550 = 1000 + (600-x) + \sqrt{x^2 + 100^2} \iff x - 50 = \sqrt{x^2 + 100^2} \iff x^2 - 100x + 2500 = x^2 + 10000$$

   La solution de cette équation est négative.

Roméo a parcouru environ 948 m sur le chemin avant de trouver la fleur.