

Rallye mathématique du Centre et du Congo

Épreuve officielle - Avril 2023

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.

Exercice n°1

Cookies en stock



6 points

Un pâtissier a fait cuire une fournée de cookies sans faire attention au nombre de petits gâteaux produits. Sa femme, le soir même, lui fait cette réflexion : « La prochaine fois, mon tendre époux, veille à ne pas refaire le même nombre de biscuits. En effet, quand j'en fais des paquets de deux, il en reste un tout seul ; regroupés par trois, il en reste deux ; regroupés par quatre, il en reste trois et regroupés par cinq, il en reste quatre. » Sachant que le nombre de cookies réalisés est inférieur à 200, trouver tous les nombres possibles de cookies qui ont pu constituer cette fournée.

Exercice n°2

Les briques de jus

8 points

Une usine produit des jus de fruits qu'elle vend par volume de 1,5 L. Les jus sont conditionnés dans des briques en carton en forme de pavé droit à base carrée. La base est un carré mesurant 7,9 cm de côté et la hauteur de la brique mesure 25 cm. Suite aux augmentations des prix des fruits et des coûts de fabrication, le chef de l'entreprise souhaite ne pas augmenter ses prix de vente mais diminuer la quantité de jus de fruits contenue dans ses briques.

1. Vérifier que les contenants actuels peuvent bien recevoir 1,5 L de liquide et calculer le volume inoccupé dans chaque contenant et le pourcentage que cela représente alors par rapport au volume total de la brique.
2. Il décide de ne vendre que 1,25 L de jus de fruits dans des nouvelles briques dont chaque dimension est plus petite que l'ancienne. Le côté de la base carrée doit toujours être un nombre entier de millimètres et la hauteur un nombre entier de centimètres. Un minimum de 4 cL doit rester inoccupé dans chaque brique. En respectant ces contraintes, quelles dimensions doit avoir la nouvelle brique afin d'avoir le plus petit volume inoccupé possible ?

Exercice n°3

Un impair, deux pairs, trois impairs,...

10 points

Le tableau suivant montre l'écriture de certains nombres entiers (voir titre de l'exercice).

	Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne...
Ligne 1	1				
Ligne 2	2	4			
Ligne 3	5	7	9		
Ligne 4	10	12	14	16	
...

1. Vérifier que la ligne 6 se termine par 36 et que 30 est dans la 3^e colonne de cette ligne.
2. Déterminer dans quelle ligne et dans quelle colonne se trouve écrit le nombre 100.
3. Quel est le 100^e nombre écrit dans le tableau ? Préciser sa ligne et sa colonne.
4. Le nombre 2023 figure-t-il dans ce tableau ?
5. Quel est le 2023^e nombre écrit ?

Exercice n°4**Déchiffrer pour notre ami****10 points**

On utilise un tableau de substitution comme celui ci-contre. Lors du chiffrement, certaines lettres sont remplacées par un monôme, c'est-à-dire par un seul chiffre. Ce sont toutes les lettres situées sur la première ligne du tableau.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	G	K	T	B		F	H	X		Y
4	O	P	D	W	E	M	C	Z	I	J
8	A	L	N	Q	U	V	R	S		

Ainsi, G est chiffré par 0, K est chiffré par 1, etc. Les autres lettres sont remplacées par des binômes, c'est-à-dire par deux chiffres. Le premier des deux chiffres est donné par le chiffre de ligne, le second par le chiffre de colonne. Ainsi, avec le tableau précédent, J est chiffré par 49, U est chiffré par 84. Avec le tableau précédent, le mot GEOMETRIE sera donc chiffré en 0444045442864844.

Pour le déchiffrement, on procède ainsi. On commence par regarder le premier chiffre du message chiffré :

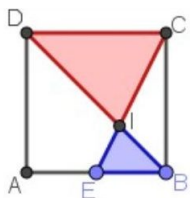
- s'il s'agit d'un chiffre de ligne, c'est que l'on est en train de déchiffrer un binôme. On prend alors également le second chiffre, et on remplace par la lettre correspondante dans le tableau de chiffrement. On reprend le déchiffrement à partir du 3^e chiffre, etc.
- s'il ne s'agit pas d'un chiffre de ligne, c'est que l'on est en train de déchiffrer un monôme. On remplace ce seul chiffre par la lettre figurant dans le tableau de correspondance et on reprend le déchiffrement à partir du 2^e chiffre, etc.

1. Chiffrer : RALLYE MATHEMATIQUE DU CENTRE
2. Déchiffrer : 4544864648414084862408428644459
3. Déterminer le tableau de codage utilisé pour chiffrer le message :
« AU ZOO J AI VU QUATRE YACKS, DEUX LAMAS, HUIT GIRAFES ET UN BEBE WAPITI »
en 30313500173049313431302131032303733638103151430393061631421241330111061023115361036108307424

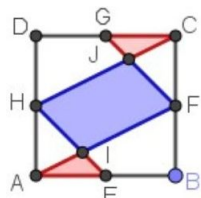
Exercice n°5**Des brillants carreaux maths****12 points**

Fred a sélectionné cinq modèles de carreaux de carrelage de 10 cm de côté pour le sol de sa salle de bain. Désirant avoir une salle de bain lumineuse, il choisira le carreau dans lequel la proportion de blanc est la plus importante. Quel carreau choisira-t-il ?

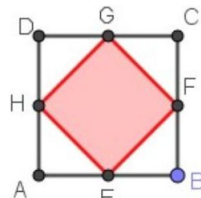
Les points E, F, G et H sont les milieux des côtés des carrés.



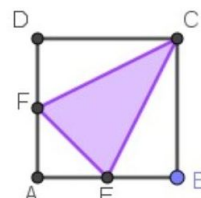
Carreau n°1



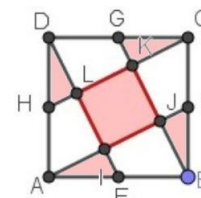
Carreau n°2



Carreau n°3



Carreau n°4



Carreau n°5

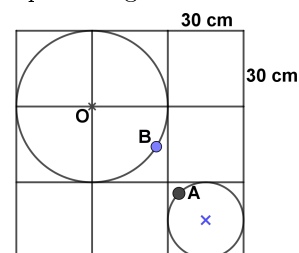
Exercice n°6**La bille, l'aimant et les deux roues****8 points**

Un mobile est constitué de deux roues :

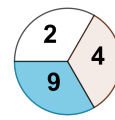
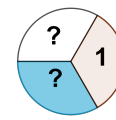
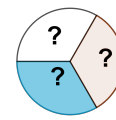
Sur la petite roue - de diamètre 30 cm - est fixé un puissant aimant A.
Sur la grande roue - de diamètre double - est fixée une bille de fer B.
Les deux roues tournent sur leur axe.

Si la bille passe à moins de 19 cm de l'aimant puissant, elle « saute » en franchissant l'espace séparant les deux roues pour se fixer sur l'aimant.

Vue de dessus du mobile : tous les carrés du quadrillage mesurent 30 cm de côté.



1. En faisant tourner les deux roues, est-il possible que la bille B « saute » sur l'aimant A ?
2. Si l'on positionne la petite roue avec l'aimant A le plus proche possible de la grande roue, la bille B sautera-t-elle sur l'aimant si l'angle \widehat{AOB} mesure 10 degrés ?

Exercice n°7**Jeux de roues****6 points****Roue A****Roue B****Roue C**

On considère un jeu avec trois roues A, B et C comportant chacune 3 secteurs angulaires égaux. Les nombres entiers de 1 à 9 sont répartis sur les 9 secteurs angulaires des 3 roues.

Chaque joueur lance une roue et le gagnant est celui qui obtient le plus grand nombre.

Lina prend la roue A dont les 3 secteurs sont numérotés comme suit : 2 ; 4 ; 9.

Olivia observe les deux roues restantes et choisit la roue C car elle sait alors qu'elle sera gagnante avec une probabilité de $\frac{5}{9}$, alors qu'avec la roue B elle sera perdante contre la roue A avec aussi une probabilité de $\frac{5}{9}$. Olivia note toutefois

que la roue C sera perdante contre la roue B avec là encore une probabilité de $\frac{5}{9}$.

Sachant que le nombre 1 est sur la roue B, quelles sont les nombres des secteurs des roues B et C ?

Exercice n°8**L'échelle n'est pas à l'échelle****8 points**

Rémy souhaite construire une échelle pour accéder à son lit en mezzanine.

Les deux montants de l'échelle et les cinq marches sont fabriqués à l'aide de planches en chêne de 14 cm de large.

Les marches mesurent chacune 38 cm de long sur 14 cm de profondeur.

Il souhaite disposer l'échelle comme indiqué sur le schéma ci-contre représentant l'échelle vue de côté.

Quelle longueur de planche doit-il acheter ?

